

TD 15 : Dénombrement

15.1 Dénombrement théorique

Exercice 1 (★) Soit n un entier. Calculer $\text{Card}\{(x, y) \in \mathbb{N}^2 \text{ tel que } n = x + 2y\}$.

Exercice 2 (★★) Soit E un ensemble fini de cardinal n .

- a) Calculer le nombre de surjection de E dans $\{1, 2\}$.
- b) Calculer le nombre de surjection de E dans $\{1, 2, 3\}$.
- c) Calculer le nombre de surjection de E dans E .
- d) Calculer le nombre d'application non surjective de E dans E .

Exercice 3 (★★) Soit E l'ensemble des entiers écrit en base 10 avec exactement les six nombres 1, 2, 3, 4, 5, 6. Par exemple : 123456, 214356 $\in E$.

- a) Calculer le cardinal de E .
- b) On peut classer par ordre croissant ces entiers. Quel est le rang de 362145 ?
- c) Quel est le 500-ième nombre de E ?
- d) Calculer la valeur de la somme : $\sum_{x \in E} x$.

Exercice 4 (★) Etablir les formules suivantes, pour deux entiers $n \geq p \geq 0$:

$$\sum_{k=0}^p \binom{n}{k} \binom{n-k}{p-k} = 2^p \binom{n}{p} \quad \text{et} \quad \sum_{k=p}^n \binom{k}{p} = \binom{n+1}{p+1}.$$

Ecrire la seconde formule pour $p = 0, 1, 2, 3$ et retrouver la valeur des sommes :

$$\sum_{k=1}^n k, \quad \sum_{k=1}^n k^2 \quad \text{et} \quad \sum_{k=1}^n k^3.$$

Exercice 5 (★★) (Formule de Vandermonde) On note $E = A \cup B$ une partition de E avec $\text{Card}A = n$ et $\text{Card}B = m$.

- a) Montrer que $\phi : \mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(B) \rightarrow \mathcal{P}(E), (X, Y) \mapsto X \cup Y$ est une bijection dont on précisera la réciproque.
- b) On fixe $k \in \mathbb{N}$. En déduire que $\binom{n+m}{k} = \sum_{i=0}^k \binom{n}{i} \binom{m}{k-i}$.

Exercice 6 (★) Soit $n, p \in \mathbb{N}^*$. Déterminer le nombre de partitions d'un ensemble de np éléments en n parties de cardinal p .

Combien y a-t-il de choix de trinômes de colles possibles dans une classe de 45 élèves ?

15.2 Application aux probabilités

Exercice 7 (★★) On considère un jeu de 32 cartes à jouer. Et on regarde les mains de 5 cartes possibles. Calculer le nombre puis la probabilité des mains suivantes :

- a) un full : c'est à dire une paire et un brelan.
- b) un carré : c'est à dire 4 cartes identiques.
- c) un brelan : c'est à dire 3 cartes identiques (et ni un carré ni un full).
- d) deux paires et pas de meilleur combinaison.
- e) une paire : c'est à dire 2 cartes identiques et pas de meilleur combinaison.

Exercice 8 (★) Un lot de n balles sont rangées au hasard dans n boîtes, chacune pouvant contenir toutes les balles. Quelle est la probabilité qu'une boîte reste vide ?

Exercice 9 (★) Huit personnes garent leurs huit voitures dans un parking de 12 places alignées. Quelle est la probabilité que les quatre places restantes soient adjacentes ?

Exercice 10 (★) Une boîte contient 90 bonnes vis et 10 vis défectueuses. On en prend 10 au hasard. Quelle est la probabilité de n'avoir pris aucune vis défectueuse ?

Exercice 11 (★) Dix paires de chaussures sont dans une boîte, quatre chaussures sont prises au hasard. Quelle est la probabilité d'avoir une paire parmi les quatre ?

Exercice 12 (★) Cinq dés équilibrés à 6 faces sont lancés. Quelle est la probabilité qu'au moins trois d'entre eux montrent la même face ?