

TD 20 : Espaces préhilbertiens réels

Exercice 1 (★) Soit E un espace vectoriel euclidien de dimension $n \geq 1$.

Soit $f : E \rightarrow E$ telle que $f(0) = 0$ et pour tout $(x, y) \in E^2$, $\text{dist}(f(x), f(y)) = \text{dist}(x, y)$.

- a) Montrer que pour tout $x \in E$, $N(f(x)) = N(x)$.
- b) En déduire que pour tout $x, y \in E$, $\langle f(x) | f(y) \rangle = \langle x | y \rangle$.
- c) Soit $(e_1, \dots, e_n)$ une base orthonormée de E . Montrer que :

$$f(x) = \sum_{i=1}^n \langle x | e_i \rangle f(e_i), \forall x \in E.$$

- d) En déduire que f est un automorphisme de E .

Exercice 2 (★) Montrer que pour tout réel x, y et z , on a :

$$|x + 2y + 3z| \leq \sqrt{14} \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

et préciser le cas d'égalité.

Exercice 3 (★★) Soit E un espace euclidien de dimension n . On note $G = \mathcal{L}_{\mathbb{R}}(E, \mathbb{R})$ l'espace des formes linéaires.

- a) Soit $a \neq 0_E$. Démontrer que $H_a = \{x \in E \text{ tel que } \langle x | a \rangle = 0\}$ est un hyperplan de E .
- b) Soit H un hyperplan de E . Démontrer qu'il existe $a \in E$ tel que $H = H_a$.
- c) Donner une condition nécessaire et suffisante sur $a, b \neq 0_E$ pour que $H_a = H_b$.
- d) Pour $a \neq 0_E$, on note $\phi_a(x) = \langle a | x \rangle$, de sorte que $\phi_a \in G$. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que $\phi_a = \phi_b$.
- e) En déduire que l'application de E dans G définie par $a \mapsto \phi_a$ est un isomorphisme d'espaces vectoriels.

Exercice 4 (★) Soit p un projecteur sur un espace vectoriel euclidien E . C'est à dire que p est un endomorphisme vérifiant $p \circ p = p$. Démontrer que :

$$p \text{ est un projecteur orthogonal} \iff \forall x \in E, \|p(x)\| \leq \|x\|$$

Exercice 5 (★) On définit par le système d'équation suivant un sous-espace F de $\mathbb{R}^4$:

$$\begin{cases} x + y + -z - t = 0 \\ x - y + 2z = 0 \end{cases}$$

- a) Déterminer une base orthonormée de F .
- b) Déterminer une base orthonormée de $F^\perp$.
- c) Ecrire la matrice du projecteur orthogonal sur F dans la base canonique.
- d) Déterminer les distances de $(1, 0, 0, 1)$, $(2, 5, 0, 0)$ et $(1, 1, 1, 1)$ à F .

Exercice 6 (★★) Déterminer $\inf_{x, y, z \in \mathbb{R}} (x + z - 1)^2 + (x - y + 5)^2 + (x + y + 2z - 3)^2$

Exercice 7 (★★) Déterminer $\inf_{a, b \in \mathbb{R}} \int_0^\infty e^{-t} (t^2 - at + b)^2 dt$.

Exercice 8 (★) Déterminer la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^4$ de la projection orthogonale sur $\text{Vect}(v_1, v_2)$ où $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Exercice 9 (★★) On munit l'espace vectoriel $\mathbb{R}_2[X]$ du produit scalaire défini par :

$$\langle P | Q \rangle = \int_{-1}^1 P(t)Q(t) dt$$

- a) Vérifier que l'expression définit bien un produit scalaire.
- b) Déterminer l'orthonormalisée de Gram-Schmidt de la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$.
- c) Déterminer la distance du polynôme $P = X^2 + X + 1$ au sous-espace vectoriel F de $\mathbb{R}_2[X]$ formé des polynômes f tels que $f'(0) = 0$.