

TD 18 : Matrice et application linéaire

Exercice 1 (★) Soient (e_1, e_2, e_3) et (f_1, f_2, f_3, f_4) les bases canoniques respectivement de $\mathbb{R}^3$ et $\mathbb{R}^4$.

Soit u l'application de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^4$ définie par :

$$u \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x+y \\ x-y \\ -x+z \\ -y+z \end{pmatrix}.$$

- a) Ecrire la matrice de u dans les bases canoniques.
- b) Montrer que $(f_1, f_2, u(e_1), u(e_2))$ est une base de $\mathbb{R}^4$.
- c) Ecrire la matrice de u dans les bases (e_1, e_2, e_3) et $(f_1, f_2, u(e_1), u(e_2))$.

Exercice 2 (★) On considère dans $\mathbb{R}^3$ le plan P d'équation $z = x - y$ et la droite D d'équation $x = -y = z$. Montrer que ces espaces sont supplémentaires et écrire la matrice dans la base canonique de la projection sur P le long de D . En déduire la matrice de la symétrie associée.

Exercice 3 (★) Soient (e_1, e_2, e_3) la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et $w_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$, $w_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $w_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$. On considère l'endomorphisme u définie par $u(e_i) = w_i$ pour $i = 1, 2, 3$.

- a) Ecrire la matrice de u dans la base canonique.
- b) Déterminer une base de $\text{Ker}(u)$ et $\text{Im}(u)$.
- c) Montrer que $\mathbb{R}^3 = \text{Ker}(u) \oplus \text{Im}(u)$.
- d) Montrer que l'application $Id - u$ est un automorphisme de $\mathbb{R}^3$.

Exercice 4 (★) Soit $a \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$. On note $\mathcal{B}_0$ la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$. Soient $P_k = (X - a)^k$ pour $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$.

- a) Montrer que $\mathcal{B} = (P_0, \dots, P_n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.
- b) Calculer les matrices de passage entre ces deux bases.

- c) En déduire l'inverse de matrice $\begin{pmatrix} 1 & 6 & 12 & 8 \\ 0 & 1 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Exercice 5 (★) Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$.

- a) On considère l'application linéaire $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ représentée, dans les bases canoniques, par la matrice A . Calculer l'image par f du vecteur $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$.
- b) On considère l'application linéaire $f : \mathbb{R}_1[X] \rightarrow \mathbb{R}_2[X]$ représentée, dans les bases canoniques, par la matrice A . Calculer l'image par f du polynôme $P(x) = 3X + 4$.

Exercice 6 (★) Soit (e_1, e_2, e_3) la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ tel que :

$$f(e_1) = e_1 + 2e_2, f(e_2) = e_1 + 6e_2 + 2e_3 \text{ et } f(e_3) = e_1 - e_3.$$

Ecrire la matrice de f dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

Déterminer les sous-espaces vectoriels $\text{Ker} f$ et $\text{Im} f$.

Exercice 7 (★) On considère l'application $u : \mathbb{R}_3[X] \rightarrow \mathbb{R}_3[X]$, $P(X) \mapsto P(X + 1) - P(X)$.

- a) Montrer que u est un endomorphisme et écrire sa matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}_3[X]$.
- b) Déterminer les sous-espaces vectoriels $\text{Ker} u$ et $\text{Im} u$.
- c) Plus généralement déterminer les sous-espaces $\text{Ker} u^k$, pour $k \in \mathbb{N}^*$.