

TD 21 : Intégration

Exercice 1 (★) Étudier les suites suivantes :

$$\left(\sum_{k=0}^{n-1} \frac{\sin(\frac{\pi}{n})}{2 + \cos(\frac{k\pi}{n})} \right)_{n>0}, \quad \left(\sum_{k=0}^{n-1} \frac{k}{n^2} \arctan\left(\frac{k}{n}\right) \right)_{n>0}, \quad \left(n^2 \left(\prod_{k=1}^n k^k \right)^{-\frac{4}{n^2}} \right)_{n>0}.$$

Exercice 2 (★) Pour tout $x > 0$, on pose $f(x) = \frac{\sin x}{x}$.

- a) Montrer que f se prolonge par continuité en 0 et qu'on a $|f(x)| \leq 1, \forall x \geq 0$.
- b) À l'aide d'une intégration par parties, prouver l'inégalité $\left| \int_{\pi/2}^x f(t) dt \right| \leq \frac{2}{\pi}$.
- c) Montrer que la fonction f admet une primitive bornée sur $[0, +\infty[$.

Exercice 3 (★) Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. Montrer que la fonction g définie sur $\mathbb{R}^*$ par :

$$g(x) = \frac{1}{x} \int_0^x f(t) dt, \quad \text{admet un prolongement continue en 0.}$$

Exercice 4 (★) (Inégalité de Cauchy-Schwarz)

Soient f et g deux fonctions continues de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$.

En étudiant le discriminant du polynôme $P(X) = \int_a^b (f(t) + Xg(t))^2 dt$, montrer que :

$$\left(\int_a^b f(t)g(t) dt \right)^2 \leq \int_a^b f(t)^2 dt \int_a^b g(t)^2 dt. \quad \text{Etudier le cas d'égalité.}$$

Exercice 5 (★) On définit la fonction sur $\mathbb{R} : F(x) = \int_x^{x^2} \sin(t) dt$.

Montrer que F est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer sa dérivée.

Exercice 6 (★) Soit $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. Montrer que les suites suivantes tendent vers 0 :

$$I_n = \int_0^1 \frac{f(t)}{t+n}, \quad J_n = \int_0^1 t^n f(t) dt \quad \text{et} \quad K_n = \int_0^1 \frac{f(t) dt}{1+nt}.$$

Exercice 7 (★★) On considère la famille de fonction : $f_n(x) = \frac{x+1}{(x^2+1)^n(x^2+3x+2)}$.

- a) Calculer $\int_0^1 f_1(t) dt$.
- b) Soit g une fonction continue sur $[0, 1]$.
Montrer que la suite donnée par : $u_n = \int_0^1 g(t) f_n(t) dt$, est bien définie et est bornée.
- c) Montrer que l'équation $f_n(x) = 2^{-n}$ admet une unique solution x_n dans $[0, 1]$.
- d) Calculer $f_{n+1}(x_n)$ et en déduire que (x_n) est croissante.
- e) Montrer que x_n est convergente et déterminer sa limite.

Exercice 8 (★★) Pour tout entier non nul n , on pose : $I_n = \int_1^e (\ln t)^n dt$

- a) Etudier les variations de la suite (I_n) et calculer I_1 .
- b) Démontrer que $I_{n+1} = e - (n+1)I_n$.
- c) En déduire que $0 \leq (n+1)I_n \leq e$.
- d) Calculer les limites de (I_n) et (nI_n) .

Exercice 9 (★) Soit $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ une fonction continue telle que : $\int_0^1 f(t) dt = \int_0^1 f(t)^2 dt$.

Montrer que f est une fonction constante.

Exercice 10 (★) Soit f et g deux fonctions continues sur $[a, b]$. On suppose g positive.

Montrer qu'il existe $c \in [a, b]$ tel que :

$$\int_a^b f(t)g(t) dt = f(c) \int_a^b g(t) dt.$$

Exercice 11 (★) Calculer une primitive des fonctions suivantes :

$$\frac{x^4 + 1}{x^3 - 1}, \quad \frac{x^3 - 4x^2 + 2x + 1}{(x^2 + 1)(x^2 + 4)}, \quad \frac{x^3 + x^2}{x^3 + x}, \quad \frac{1}{2x^2 + x + 1}.$$