DM5 - Corrige

Exercice 1 : 1) La progression arithmétique suggère : $(X^3+3)P_1 = X^{12}-81$.
On recherche alors les racines 12ieme de 81 : $81^{1/12}\mathbb{U}_{12} = 3^{1/3}\{e^{ik\pi/6} \text{ pour } 0 \le k \le 11\}$.
On doit retirer les racines de X^3+3, les racines cubiques de $-3 = 3e^{i\pi}$ les nombres de $3^{1/3}e^{i\pi/3}\mathbb{U}_3$. On trouve les 9 racines du polynôme unitaires donc :

$$P_1 = (X-3^{1/3})(X-3^{1/3}e^{i\pi/6})(X-3^{1/3}e^{i\pi/2})(X-3^{1/3}e^{2i\pi/3})(X-3^{1/3}e^{5i\pi/6})$$
$$\times (X-3^{1/3}e^{-5i\pi/6})(X-3^{1/3}e^{-2i\pi/3})(X-3^{1/3}e^{-i\pi/2})(X-3^{1/3}e^{-i\pi/6})$$

D'où $P_1 = (X-3^{1/3})(X^2-3^{5/6}X+3^{2/3})(X^2+3^{2/3})(X^2+3^{1/3}X+3^{2/3})(X^2+3^{5/6}X+3^{2/3})$.

2) Une racine $z \in \mathbb{C}$ vérifie $\left(\dfrac{z+2}{z}\right)^6 = -1 = e^{i\pi}$.
Donc pour $0 \le k < 6$, on a : $\dfrac{z+2}{z} = e^{i\pi/6+2ik\pi/6}$.
Puis $z = \dfrac{-2}{1-e^{i\pi/6+2ik\pi/6}} = \dfrac{e^{-i\pi/12-ik\pi/6}}{i\sin(i\pi/12+ik\pi/6)}$.
Le coefficient dominant est 2 donc :

$$\begin{aligned}
P_2(X) &= 2(X-\frac{e^{-7i\pi/12}}{\sin(\pi/12)})(X-\frac{e^{-9i\pi/12}}{\sin(3\pi/12)})(X-\frac{e^{-11i\pi/12}}{\sin(5\pi/12)})\\
&\quad\times (X-\frac{e^{-13i\pi/12}}{\sin(7\pi/12)})(X-\frac{e^{-15i\pi/12}}{\sin(9\pi/12)})(X-\frac{e^{-17i\pi/12}}{\sin(11\pi/12)})\\
&= 2(X^2-2\frac{\cos(7\pi/12)}{\sin(\pi/12)}X+\frac{1}{\sin^2(\pi/12)})(X^2+1)(X^2-2\frac{\cos(11\pi/12)}{\sin(5\pi/12)}X+\frac{1}{\sin^2(5\pi/12)})\\
&= 2(X^2+1)(X^2+2X+\frac{1}{\sin^2(\pi/12)})(X^2+2X+\frac{1}{\cos^2(\pi/12)}).
\end{aligned}$$

Exercice 2 : 1) On a $P_1(X) = X^4+X^2+1$.
Soit $z \in \mathbb{C}$.
On a $P_1(z) = 0 \Leftrightarrow (z^2)^2+z^2+1 = 0 \Leftrightarrow z^2 \in \{j, j^2\}$.
Puis $z^2 = j = e^{2i\pi/3} \Leftrightarrow z \in \{e^{i\pi/3}, e^{4i\pi/3}\} = \{-j^2, j^2\}$.
Et $z^2 = j^2$ donne les conjuguées $\{-j, j\}$.
Ainsi $P_1(X) = (X-j)(X-j^2)(X+j)(X+j^2)$ admet 4 racines simples.
Donc sur $\mathbb{R}[X]$, on obtient : $P_1(X) = (X^2+X+1)(X^2-X+1)$.

2) On a $P_2(X) = X^8+X^4+1$. On remarque que $(X^4-1)P_2(X) = X^{12}-1 = \prod_{\omega\in\mathbb{U}_{12}}(X-\omega)$.
Donc $P_2(X) = (X-e^{i\pi/6})(X-e^{i\pi/3})(X-e^{2i\pi/3})(X-e^{5i\pi/6})(X-e^{7i\pi/6})(X-e^{4i\pi/3})(X-e^{5i\pi/3})(X-e^{11i\pi/6})$.
Puis $P_2(X) = (X^2-\sqrt{3}X+1)(X^2-X+1)(X^2+X+1)(X^2+\sqrt{3}X+1)$ sur $\mathbb{R}[X]$.

3) Soit $n \in \mathbb{N}$, on calcul $P_n(X)(X^{2^{n+1}}-X^{2^n}+1) = (X^{2^{n+1}}+X^{2^n}+1)(X^{2^{n+1}}-X^{2^n}+1)$
$= (X^{2^{n+1}}+1)^2-(X^{2^n})^2 = X^{2^{n+2}}+2X^{2^{n+1}}+1-X^{2^{n+1}} = P_{n+1}(X)$.

4) La question précédente donne ainsi pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P_n | P_{n+1}$.
Ainsi par transitivité de la relation d'ordre, on trouve si $n_1 \leq n_2$, alors $P_{n_1} | P_{n_2}$.
Donc le pgcd de deux de ces polynômes est le plus petit car il divise le plus grand :
$PGCD(P_{n_1}, P_{n_2}) = P_{\min(n_1,n_2)}$.

5) On a : $P_0(X) = X^2 + X + 1$ et pour $n \in \mathbb{N}, P_0(X^{2^n}) = X^{2^{n+1}} + X^{2^n} + 1 = P_n(X)$.
Soit $z \in \mathbb{C}$ une racine de P_n alors z^{2^n} est une racine de $P_0(X) = (X - j)(X - j^2)$.
Ainsi $z^{2^n} = j = e^{2i\pi/3} \Leftrightarrow z = e^{\frac{2i\pi(3k+1)}{3.2^n})}$ pour $k \in [\![0, 2^n - 1]\!]$.
On dispose ainsi de 2^n racines et de 2^n conjugués associés d'un polynôme de degré 2^{n+1}.
Les racines sont simples et :

$$\begin{aligned} P_n(X) &= \prod_{k=0}^{2^n-1} (X - e^{2i\pi(3k+1)}3.2^n)(X - e^{-2i\pi(3k+1)}3.2^n) \\ &= \prod_{k=0}^{2^n-1} (X^2 - 2\cos\left(\frac{2\pi(3k+1)}{3.2^n}\right) X + 1) \end{aligned}$$

6) D'après les liens entre somme/produit et coefficients du polynôme.
On lit le produit vaut $(-1)^{2^{n+1}}1 = 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et la somme vaut 0 dès que $n \geq 1$.
Pour $n = 0$, la somme vaut -1.