Devoir Surveillé de Mathématiques n$^{\text{o}}$ 6
le samedi 2 Mars 2024 - durée 4h

Problème I : On considère la fonction $\mathrm{th}(x) = \dfrac{\mathrm{sh}\,(x)}{\mathrm{ch}\,(x)}$ définie pour $x \in \mathbb{R}$.

Partie I : Etude de la fonction réciproque de la tangente hyperbolique

1. Montrer, en étudiant ses variations, que la fonction th est un bijection de $\mathbb{R}$ vers un intervalle I à préciser.

On note Argth sa bijection réciproque.

2. Démontrer que Argth est de classe C^∞ sur I et calculer sa dérivée première.
3. En déduire que pour tout $x \in I$, $\mathrm{Argth}(x) = \dfrac{1}{2}\ln\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)$.
4. Déterminer une développement limité à l'ordre 5 de Argth en 0.

Partie II : Etude d'une équation différentielle

5. Résoudre l'équation différentielle $(E) : xy' + 3y = \dfrac{1}{1-x^2}$ sur l'intervalle $]0, 1[$.

Partie III : Etude d'une équation fonctionnelle

On recherche les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivables en 0 vérifiant :

$$(F) : \forall x \in \mathbb{R}, f(2x) = \frac{2f(x)}{1 + [f(x)]^2}.$$

6. Déterminer les fonctions constantes solutions de (F).
7. Montrer que si f est solution de (F) alors $-f$ est également solution de (F).
8. Montrer que th est solution de (F).
9. Montrer que si f est solution alors pour tout $x \in \mathbb{R}, f(x) \in [-1, 1]$.

Dans les questions 10 à 13, on suppose que f est une solution telle que $f(0) = 1$.

Soit $x_0 \in \mathbb{R}$ et $u_n = f\left(\dfrac{x_0}{2^n}\right)$.

10. Montrer que (u_n) est une suite convergente et préciser sa limite.
11. Etablir une relation de récurrence entre u_n et u_{n+1}. En déduire que (u_n) est une suite de signe constant et est monotone.
12. A l'aide de la question 9, montrer que (u_n) est la suite constante égale à 1.
13. En déduire l'unique solution f dans ce cas.
14. Que se dire si l'on suppose désormais que $f(0) = -1$.

Dans les questions 15 à 17, on suppose que f est solution telle que $f(0) = 0$.

15. Démontrer que pour tout $x \in \mathbb{R}, f(x) \neq 1$ et $f(x) \neq -1$.

On pose $g(x) = \mathrm{Argth}(f(x))$.

16. Montrer que g est dérivable en 0 et que $g(2x) = 2g(x)$.
17. Montrer que $h(x) = \dfrac{g(x)}{x}$ définie une fonction qui se prolonge par continuité en $x = 0$.
18. On pose $a = h(0)$. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}, g(x) = ax$.
19. En déduire l'ensemble des solutions de (F).

Problème II : On considère la fonction f définie pour $x > 0$ par $f(x) = x^{\frac{1}{x}}$.

1. Montrer que f est de classe C^{∞} sur $\mathbb{R}_+^*$ et calculer $f'(x)$.
2. Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$. En déduire l'équation d'une asymptote à la courbe de f.
3. Montrer que la fonction est prolongeable par continuité en 0 et préciser $f(0)$.
4. La fonction est-elle dérivable en 0 ?
5. Déterminer les variations de f. En déduire que f réalise une bijection de $[0, e]$ vers un intervalle que l'on précisera.

On considère la suite définie par $u_{n+1} = f(u_n)$ et $u_0 = 1/2$.

6. Montrer que la suite (u_n) converge vers une limite que l'on précisera.
7. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un unique $v_n \in \mathbb{R}_+$ tel que $f(v_n) = \dfrac{1}{n+1}$.
8. Montrer que la suite (v_n) converge vers une limite que l'on précisera.

Problème III : On recherche à résoudre l'équation différentielle $(\mathcal{E}) : y^{(3)}(t) = y(t) + \sin(t)$. On note $(\mathcal{E}_0)$ l'équation homogène associée.

1. Montrer qu'il existe un unique réel $r \in \mathbb{R}$ tel que $y_1(t) = e^{rt}$ est une solution homogène.

On recherche les solutions homogènes sous la forme $y_h(t) = K(t)y_1(t)$ avec K de classe C^3.

2. Montrer que y_h est solution de $(\mathcal{E}_0)$ ssi $K^{(3)}(t) + 3K''(t) + 3K'(t) = 0$.
3. Déterminer deux fonctions K_1 et K_2 tel que $K'(t) = AK_1(t) + BK_2(t)$ avec $A, B \in \mathbb{R}$.
4. En déduire que $y_2(t) = e^{-t/2} \cos\left(\dfrac{\sqrt{3}t}{2}\right)$ et $y_3(t) = e^{-t/2} \sin\left(\dfrac{\sqrt{3}t}{2}\right)$ permettent d'écrire toutes les solutions homogènes sous la forme :
$$y_h(t) = \lambda_1 y_1(t) + \lambda_2 y_2(t) + \lambda_3 y_3(t) \text{ avec } \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}.$$
5. Faire le $DL_2(0)$ de y_h en fonction des scalaires $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$.
6. Déterminer les coefficients $C, D \in \mathbb{R}$ tels que $y_p(t) = C\cos(t) + D\sin(t)$ est solution de $(\mathcal{E})$.
7. Calculer le $DL_2(0)$ de la solution particulière y_p.

On résout désormais le problème de Cauchy associée à $\mathcal{E}$ et aux conditions initiales :
$$y(0) = 1, y'(0) = 3 \text{ et } y''(0) = 4.$$

8. Déterminer le $DL_2(0)$ de y à l'aide de la formule de Taylor-Young.
9. En déduire la valeur de y à l'aide des trois développements limités déjà calculés.