DM6 : Espace vectoriel
à rendre le Lundi 18 Mars 2024.

Exercice 1 : 1) Déterminer si les ensembles suivants sont des $\mathbb{R}$-espaces-vectoriels :

a. $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ tel que $2x^2 + 2y^2 + z^2 + 2xz + 2yz = 0\}$.

b. $\{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tel que $\forall x \in \mathbb{R}, f(x^2) = f(x) - f(2-x)\}$.

c. $\{\left(\begin{smallmatrix} z_1 \\ z_2 \end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{C}^2$ tel que $\bar{z_1} + z_2 = 0\}$.

2) Déterminer si les ensembles suivants sont des $\mathbb{C}$-espaces-vectoriels :

a. $\{(x,y,z) \in \mathbb{C}^3$ tel que $2x^2 + 2y^2 + z^2 + 2xz + 2yz = 0\}$.

b. $\{f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ tel que $\forall x \in \mathbb{R}, f(x^2) = f(x) - f(2-x)\}$.

c. $\{\left(\begin{smallmatrix} z_1 \\ z_2 \end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{C}^2$ tel que $\bar{z_1} + z_2 = 0\}$.

Exercice 2 : Soient $E = C^1([0,1],\mathbb{R})$, $\quad F = \left\{f \in E \text{ telle que } \int_0^1 f = f(0) = f'(1) = 0\right\}$
et $G = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}(f_0, f_1, f_2)$ avec $f_k : [0,1] \to \mathbb{R}, t \mapsto t^k$.

1) Montrer que F et G sont des sous-$\mathbb{R}$-espaces vectoriels de E.
2) Montrer que F et G sont en somme directe.
3) Montrer que $E = F \oplus G$.

Exercice 3 : Soient $u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, u_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$ et $u_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ des vecteurs de $\mathbb{R}^3$.

1) Montrer que la famille (u_1, u_2, u_3, u_4) est liée.
2) Montrer que la famille (u_1, u_2, u_3) est génératrice de $\mathbb{R}^3$.
3) Montrer que la famille (u_1, u_2, u_4) n'est pas génératrice de $\mathbb{R}^3$.
4) En déduire que $\mathcal{B} = (u_1, u_2, u_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$
et décomposer la base canonique de $\mathbb{R}^3$ sur $\mathcal{B}$.