DS n° 6-corrigé

Problème I : **Partie I :** **Etude de la fonction réciproque de la tangente hyperbolique**

1. La fonction est dérivable sur $\mathbb{R}$ car $\operatorname{ch}(x) > 0$.
   De plus $\operatorname{th}'(x) = \dfrac{\operatorname{ch}^2(x) - \operatorname{sh}^2(x)}{\operatorname{ch}^2(x)} = \dfrac{1}{\operatorname{ch}^2(x)} > 0$.
   Donc th est strictement croissante et continue sur $\mathbb{R}$.
   D'après le théorème de la bijection, elle réalise une bijection de $\mathbb{R}$ vers $\operatorname{th}(\mathbb{R})$.
   On a $\operatorname{th}(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \sim_{+\infty} \dfrac{e^x}{e^x} = 1$. Et $\operatorname{th}(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \sim_{-\infty} \dfrac{-e^{-x}}{e^{-x}} = -1$.
   Ainsi $I = \operatorname{th}(\mathbb{R}) =]-1, 1[$.
2. La fonction th est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ et th$'$ ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$.
   Donc sa bijection réciproque Argth est C^∞ sur I.
   Soit $x \in \mathbb{R}$ et $y = \operatorname{th}(x) \in I$. On a $\operatorname{Argth}'(y) = \dfrac{1}{\operatorname{th}'(x)} = \dfrac{1}{1 - \operatorname{th}^2(x)} = \dfrac{1}{1 - y^2}$.
   En effet, on a $\operatorname{th}'(x) = \dfrac{\operatorname{ch}^2(x) - \operatorname{sh}^2(x)}{\operatorname{ch}^2(x)} = 1 - \dfrac{\operatorname{sh}^2(x)}{\operatorname{ch}^2(x)} = 1 - \operatorname{th}^2(x)$.
3. On peut calculer la primitive la fraction rationnelle $\dfrac{1}{1-y^2}$ en la décomposant en éléments simples. On a $\dfrac{1}{1-y^2} = \dfrac{-1}{(y-1)(y+1)} = \dfrac{(1/2)}{y+1} - \dfrac{(1/2)}{y-1}$.
   Donc $\operatorname{Argth}(y) = \dfrac{1}{2}\ln|y+1| - \dfrac{1}{2}\ln|y-1| + C = \dfrac{1}{2}\ln\left(\dfrac{1+y}{1-y}\right) + C$.
   Puis en $y = 0$, on obtient $C = 0$ car $\operatorname{th}(0) = 0$ donne $\operatorname{Argth}(0) = 0$.
4. On a $\operatorname{Argth}(x) = \dfrac{1}{2}\ln\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)$
   $= \dfrac{1}{2}\ln(1+x) - \dfrac{1}{2}\ln(1-x)$
   $=_{x\to 0} \dfrac{1}{2}\big(x - x^2/2 + x^3/3 - x^4/4 + x^5/5 + o(x^5)\big) - \dfrac{1}{2}\big(-x - x^2/2 - x^3/3 - x^4/4 - x^5/5 + o(x^5)\big)$
   $=_{x\to 0} x + x^3/3 + x^5/5 + o(x^5)$.

   Partie II : **Etude d'une équation différentielle**
5. La forme normalisée de (E) est $y' + \dfrac{3}{x}y = \dfrac{1}{x(1-x^2)}$. C'est une équation différentielle linéaire d'ordre 1 à coefficient $a(x) = \dfrac{-3}{x}$ et second membre $b(x) = \dfrac{1}{x(1-x^2)}$. Ils sont C^∞ sur $]0, 1[$.
   On a $A(x) = -3\ln(x)$ est une primitive de $a(x)$. Donc $y_h(x) = \exp(A(x)) = \dfrac{1}{x^3}$ est la solution homogène génératrice.
   On recherche une solution particulière $y_p(x) = \dfrac{K(x)}{x^3}$ à l'aide de la méthode de Lagrange.
   On a $y_p'(x) = \dfrac{K'(x)}{x^3} - 3\dfrac{K(x)}{x^4}$. On obtient $\dfrac{1}{x(1-x^2)} = y_p'(x) + \dfrac{3y_p(x)}{x} = \dfrac{K'(x)}{x^3}$. Donc

$K'(x) = \dfrac{x^2}{1-x^2} = -1 + \dfrac{1}{1-x^2}$ avec une division euclidienne. Puis $K(x) = -x + \text{Argth}(x)$ et ainsi $y_p(x) = \dfrac{-1}{x^2} + \dfrac{\text{Argth}(x)}{x^3}$.

Donc les solutions sont de la forme $y(x) = \lambda y_h(x) + y_p(x) = \dfrac{\lambda - x + \text{Argth}(x)}{x^3}$ pour $\lambda \in \mathbb{R}$.

__Partie III :__ **Etude d'une équation fonctionnelle**

6. On suppose que $f(x) = l$ est constante. Donc $l = \dfrac{2l}{1+l^2}$. $\Leftrightarrow$ ($l = 0$ ou $1 + l^2 = 2$) $\Leftrightarrow$ ($l = 0$ ou $l^2 = 1$) $\Leftrightarrow l \in \{0, 1, -1\}$. Donc les solutions constantes sont $0, 1$ et -1.
7. On suppose f solution de (F). Alors $-f$ est dérivable en 0 et $-f(2x) = \dfrac{-2f(x)}{1+[-f(x)]^2}$ i.e. $-f$ est solution.
8. La fonction th est dérivable en 0.
   De plus, on calcul $\dfrac{2\text{th}(x)}{1+\text{th}^2(x)} = 2\dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \dfrac{(e^x + e^{-x})^2}{(e^x + e^{-x})^2 + (e^x - e^{-x})^2}$
   $= 2(e^x - e^{-x})(e^x + e^{-x}) \dfrac{1}{e^{2x} + 2 + e^{-2x} e^{2x} - 2 + e^{-2x}}$
   $= \dfrac{2(e^{2x} - e^{-2x})}{2(e^{2x} + e^{-2x})} = \text{th}(2x)$.
   Donc th est solution de (F).
9. On note $\varphi(y) = \dfrac{2y}{1+y^2}$ de sorte que $f(2x) = \varphi(f(x))$.
   On démontre que $g(y) \in [-1, 1]$. En effet $(y^2 + 1) - 2|y| = (|y| - 1)^2 \geq 0$.
   Donc $2|y| \leq 1 + y^2$ i.e. $|\varphi(y)| = \dfrac{2|y|}{1+y^2} \leq 1$.
   Ainsi $f(x) = \varphi(f(x/2)) \in [-1, 1]$.
10. La suite $\dfrac{x_0}{2^n} \to 0$ comme suite géométrique. Puis f est continue en 0 car dérivable. Donc $u_n = f\left(\dfrac{x_0}{2^n}\right) \to f(0) = 1$.
11. On a $2\dfrac{x_0}{2^{n+1}} = \dfrac{x_0}{2^n}$. Donc on a $u_n = f(2x) = \varphi(f(x)) = \varphi(u_{n+1})$ avec $x = \dfrac{x_0}{2^{n+1}}$. Ainsi $u_n = \dfrac{2u_{n+1}}{1+u_{n+1}^2}$. En particulier $u_n u_{n+1} = \dfrac{2u_{n+1}^2}{1+u_{n+1}^2} \geq 0$. Donc u_n et u_{n+1} sont de même signe. Donc la suite est de signe constant. D'après la question précédente sa limite est 1. Donc la suite est positive.
    Puis $u_{n+1} - u_n = u_{n+1}\left(1 - \dfrac{2}{1+u_{n+1}^2}\right) = u_{n+1}\dfrac{u_{n+1}^2 - 1}{u_{n+1}^2 + 1} \leq 0$.
    En effet $u_{n+1} = f(x) \in [-1, 1]$ donc $u_{n+1}^2 - 1 \leq 0$. Ainsi la suite est décroissante.
12. On sait que la suite est décroissante et tend vers 1 donc $u_n \geq 1$. Or $u_n = f(x) \leq 1$ d'après la question 9. Donc $u_n = 1$ par anti-symétrie.
13. On en déduit que $u_0 = f(x_0) = 1$. Donc la fonction f est constante égale à 1.
14. On suppose désormais que $f(0) = -1$. Alors $-f$ est aussi solution et vérifie $-f(0) = 1$. On en déduit que $-f$ est constante égale à 1. Puis f est constante égale à -1.

15. Si $f(x) = 1$ alors en considérant la suite $x_n = \dfrac{x}{2^n}$, on aurait $f(x_n) = 1$ d'après les arguments précédents et $f(x_n) \to f(0) = 0$ par continuité de f. Ceci donne $0 = 1$ Absurde.
On obtient le même argument pour $f(x) = -1$ car 1 et -1 sont des points fixes de φ.
16. La fonction f est dérivable en 0 et Argth est dérivable en $f(0) = 0$. Donc comme composée g est dérivable en 0. De plus $f(x) = \text{th}(g(x))$ vérifie $f(2x) = \dfrac{2f(x)}{1+f(x)^2} = \dfrac{2\text{th}(g(x))}{1+\text{th}^2(g(x))} = \text{th}(2g(x))$ d'après la question 8. Ainsi on a établit que $\text{th}(g(2x)) = \text{th}(2g(x))$ donc $g(2x) = 2g(x)$ par injectivité.
17. On introduit $h(x) = \dfrac{g(x)}{x}$ pour $x \neq 0$. On a $h(x) = \dfrac{g(x)-g(0)}{x-0} \to g'(0)$ car g est dérivable en 0. Donc h se prolonge par continuité en posant $h(0) = g'(0)$.
18. On a $h(2x) = h(x)$ d'après la question 16. Soit $x_0 \in \mathbb{R}^*$. On pose $x_n = \dfrac{x_0}{2^n}$. On a $h(x_{n+1}) = h(x_n) = h(x_0)$ est constante. Et $x_n \to 0$ donc $h(x_n) \to h(0) = g'(0)$ par continuité. Donc $h(x_0) = g'(0) = a$ est constant.
On en déduit que $g(x) = ax$.
19. Dans ce cas, on trouve donc $f(x) = \text{th}(g(x)) = \text{th}(ax)$ pour $a \in \mathbb{R}$. Ce sont toutes les solutions avec les solutions constantes trouvées précédemment.

Problème II : 1. Pour $x > 0$, on peut écrire $f(x) = \exp\left(\dfrac{1}{x}\ln(x)\right)$.
Les fonctions sont bien C^∞ sur $\mathbb{R}_+^*$ et on a :
$f'(x) = \dfrac{x/x - 1.\ln(x)}{x^2}\exp\left(\dfrac{\ln(x)}{x}\right) = \dfrac{1-\ln(x)}{x^2}x^{1/x}$.

2. . On a $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\ln(x)}{x} = 0$ donc en passant à l'exponentielle (continue) on trouve $\lim\limits_{+\infty} f = e^0 = 1$. Ainsi il existe une asymptote horizontale d'équation $y = 1$.
3. On a $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(x)}{x} = -\infty$ donc $\lim\limits_{0} f = \lim\limits_{-\infty}\exp = 0$. Donc f se prolonge par continuité en 0 en posant $f(0) = 0$.
4. On trouve $\lim\limits_{0} f' = +\infty$ donc la fonction f n'est pas dérivable en 0.
5. On étudie le signe de f' il dépend que du signe de $(1-\ln(x))$ car $\dfrac{1}{x^2}x^{1/x} > 0$ pour $x > 0$. Donc la fonction est strictement croissante sur $[0, e]$ et strictement décroissante sur $[e, +\infty[$. De plus f est continue sur $[0, e]$ donc d'après le théorème de la bijection : $f : [0, e] \to [f(0), f(e)]$ est bijective. On a $[f(0), f(e)] = [0, e^{1/e}]$.
6. On recherche les points fixes $l > 0$. On a $f(l) = l \Leftrightarrow \dfrac{\ln l}{l} = \ln l \Leftrightarrow l = 1$. On a également $f(0) = 0$. Donc il y a deux points fixes 0 et 1.
La fonction est croissante sur $[0, 1]$ donc $f(]0, 1[) =]0, 1[$ est un intervalle stable. Par récurrence immédiate, $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \in]0, 1[$.
Soit $n \in \mathbb{N}$. On a $\ln(u_{n+1}) - \ln(u_n) = \dfrac{\ln(u_n)}{u_n} - \ln(u_n) = \dfrac{\ln(u_n)}{u_n}(1-u_n) < 0$ car $\ln(u_n) < 0$. Donc $\ln(u_{n+1}) < \ln(u_n)$ puis $u_{n+1} < u_n$ par croissance de l'exponentielle.

Par le théorème de limite monotone, $u_n \to l \in [0, 1/2[$ un point fixe. Donc $u_n \to 0$.

7. Pour $n \in \mathbb{N}$. On a $\dfrac{1}{n+1} \in]0, 1]$. Or f réalise une bijection de $[0, 1]$ vers $[0, 1]$. Donc il existe un unique antécédent $v_n \in [0, 1]$.
   Il pourrait exister d'autre(s) antécédent(s) dans $]1, +\infty[$.
   Mais si $x \in]1, e]$ alors $f(x) > f(1) = 1$ par croissance. Donc $f(x) \neq \dfrac{1}{n+1}$.
   Si $x \in [e, +\infty[$ alors $f(x) > \lim\limits_{+\infty} f = 1$ par décroissance. Donc $f(x) \neq \dfrac{1}{n+1}$.
   Il y a donc unicité dans $\mathbb{R}_+^*$.
8. On sait que $1/(n+1) \in f([0, e])$. Donc $v_n = f^{-1}(1/(n+1)) \to f^{-1}(0)$ car f^{-1} est continue en 0. Puis $f^{-1}(0) = 0$ car $f(0) = 0$ d'après la question 3.

Problème III :

1. On injecte dans l'équation y_1 et on obtient $r^3 e^{rt} = e^{rt}$. Il faut $r^3 = 1$ puis $r = 1$ est l'unique solution réel.
2. On a $y_h(t) = K(t)e^t$ est un produit, donc $y^{(3)}(t) = K^{(3)}(t)e^t + 3K''(t)e^t + 3K'(t)e^t + K(t)e^t$ d'après la formule de Leibniz. On trouve donc bien $K^{(3)}(t) + 3K''(t) + 3K'(t) = 0$.
3. K' est solution de l'EDL d'ordre 2 homogène : $y'' + 3y' + 3y = 0$. Le polynôme caractéristique est $X^2 + 3X + 3 = (X + 3/2)^2 + (\sqrt{3}/2)^2$. Donc les solutions homogènes génératrices sur $\mathbb{R}$ sont $K_1(t) = e^{-3t/2}\cos(\sqrt{3}t/2)$ et $y_2(t) = e^{-3t/2}\sin(\sqrt{3}t/2)$ et $K'(t) = AK_1(t) + BK_2(t)$ avec $A, B \in \mathbb{R}$.
4. A partir de $K'(t) = AK_1(t) + BK_2(t)$ reste à primitiver en $K(t) = Ak_1(t) + Bk_2(t) + C$.
   Or une primitive de $K_1(t) = e^{-3t/2}\cos(\sqrt{3}t/2)$ est de la forme :
   $k_1(t) = e^{-3t/2}(a_1 \cos(\sqrt{3}t/2) + b_1 \sin(\sqrt{3}t/2))$.
   De même une primitive de $K_2(t) = e^{-3t/2}\sin(\sqrt{3}t/2)$ est de la forme :
   $k_2(t) = e^{-3t/2}(a_2 \cos(\sqrt{3}t/2) + b_2 \sin(\sqrt{3}t/2))$.
   Donc $y_h(t) = K(t)e^t = (Aa_1 + Ba_2)y_2(t) + (Ab_1 + Bb_2)y_3(t) + Cy_1(t)$ est bien une écriture de toute solution homogène.
5. On a $y_1(t) = e^t =_{t\to 0} 1 + t + t^2/2 + o(t^2)$.
   On a $y_2(t) = e^{-t/2}\cos(\sqrt{3}t/2) =_{t\to 0} (1 - t/2 + (t/2)^2/2 + o(t^2))(1 - (\sqrt{3}t/2)^2/2 + o(t^2)) = 1 - t/2 - t^2/4 + o(t^2)$.
   On a $y_3(t) = e^{-t/2}\sin(\sqrt{3}t/2) =_{t\to 0} (1 - t/2 + o(t))(\sqrt{3}t/2 + o(t^2)) = \sqrt{3}t/2 - \sqrt{3}t^2/4 + o(t^2)$.
   Donc par combinaison linéaire, on obtient :
   $y_h(t) = (\lambda_1 + \lambda_2) + (\lambda_1 - \lambda_2/2 + \sqrt{3}\lambda_3/2)t + (\lambda_1 - \lambda_2/2 - \sqrt{3}\lambda_3/2)t^2/2 + o(t^2)$.
6. On recherche sous la forme $y_p(t) = C\cos(t) + D\sin(t)$ donc $y_p^{(3)}(t) = C\sin(t) - D\cos(t)$. On obtient dans l'équation $C = D + 1$ pour les $\sin(t)$ et $-D = C$ pour les $\cos(t)$. Ainsi $C = 1/2$ et $D = -1/2$.
7. On a $y_p(t) = \cos(t)/2 - \sin(t)/2 = 1/2 - t/2 - t^2/4 + o(t^2)$.
8. On a $y(t) = y(0) + y'(0)t + y''(0)t^2/2 + o(t^2) = 1 + 3t + 2t^2 + o(t^2)$.
9. On a $y(t) = y_h(t) + y_p(t)$ d'après le principe de superposition. Puis $y_h(t) = y(t) - y_p(t) = 1/2 + 7/2t + 5/4t^2 + o(t^2)$ correspond à l'expression de la question 5) par unicité du DL. On obtient le système linéaire :

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 & = 1/2 \\ \lambda_1 - \lambda_2/2 + \sqrt{3}\lambda_3/2 & = 7/2 \\ \lambda_1 - \lambda_2/2 - \sqrt{3}\lambda_3/2 & = 9/2 \end{cases} \text{ on résout } \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1/2 \\ 1 & -1/2 & \sqrt{3}/2 & 7/2 \\ 1 & -1/2 & -\sqrt{3}/2 & 5/2 \end{array}\right)$$

On obtient $\lambda_1 = 17/6, \lambda_2 = -7/3$ et $\lambda_3 = -\sqrt{3}/3$.