Semaine 20 - Du 11 au 15 Mars 2024

Les espaces vectoriels

Définition de la structure et exemple

Ensemble non vide muni d'une addition interne et d'un produit par les scalaires.
Espace vectoriel issue de la géométrie : $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$ sur $\mathbb{R}$, $\mathbb{K}^n$ sur $\mathbb{K}$.
Espace vectoriel issue de l'analyse : $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ et $\mathcal{F}(I, \mathbb{K})$ sur $\mathbb{K}$ pour I un ensemble.
Espace vectoriel issue de l'algèbre : $\mathbb{K}[X]$ et $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ sur $\mathbb{K}$, $\mathbb{C}$ sur $\mathbb{R}$.

Sous-espaces vectoriels

Définition et équivalence comme sous-ensemble non vide stable par combinaisons linéaires.
Sous-espace $\text{Vect}_{\mathbb{K}}(v_1, ..., v_n)$ engendré par n vecteurs d'un espace vectoriel.
Somme et intersection de deux sous-espaces vectoriels.
Somme directe et sous-espaces supplémentaires.

Famille finie de vecteurs

Famille de vecteurs libres et liées. Vecteurs colinéaires et coplanaires.
Famille de polynômes échelonnés en degré.
Famille de vecteurs générateurs.

Base d'un espace vectoriel

Base d'un espace et d'un sous-espace. Coordonnées d'un vecteur dans une base.
Bases canoniques de $\mathbb{K}^n$, $\mathbb{K}_n[X]$ et de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.
Base compatible à une décomposition en somme directe.

Liste de Questions de cours :

a) Enoncer et démontrer la formule de Taylor-Young.
b) Calculer $\ln^{(k)}(2)$ pour tout $k \in \mathbb{N}$ à l'aide de la formule de Taylor-Young.
c) Montrer que les solutions de $y'' - 3y' + 2y = 0$ forme un $\mathbb{R}$-ev. (2 méthodes)
d) Monter qu'une famille de polynôme échelonné en degré est libre.
e) Montrer que $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) = \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \oplus \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$.
f) Montrer que si $\mathcal{B}_1$ est une base de F_1, $\mathcal{B}_2$ est une base de F_2 et $E = F_1 \oplus F_2$ alors $\mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2$ est une base de E.