DM6 - Corrigé

Exercice 1 : 1) a. On peut écrire $2x^2+2y^2+z^2+2xz+2yz=(x+y+z)^2+(x-y)^2$.
Ainsi $A_{\mathbb{R}}=\{\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^3$ tel que $(x+y+z)^2+(x-y)^2=0\}$
$=\{\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^3$ tel que $x+y+z=x-y=0\}$
$=\{\begin{pmatrix}x\\x\\-2x\end{pmatrix}$ pour $x\in\mathbb{R}\}=\mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left\{\begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix}\right\}$.
Donc $A_{\mathbb{R}}$ est bien un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

b. $B_{\mathbb{R}}=\{f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ tel que $\forall x\in\mathbb{R}, f(x^2)=f(x)-f(2-x)\}$ est bien un $\mathbb{R}$-ev.
Non vide : La fonction nulle $f_0: x\mapsto 0$ vérifie $\forall x\in\mathbb{R}, f_0(x^2)=f_0(x)-f_0(2-x)$.
Stable par C.L. : Soit $f_1,f_2\in B_{\mathbb{R}}$ et $\lambda\in\mathbb{R}$. On note $f=f_1+\lambda f_2$.
Pour $x\in\mathbb{R}$, $f(x^2)=f_1(x^2)+\lambda f_2(x^2)=[f_1(x)-f_1(2-x)]+\lambda[f_2(x)-f_2(2-x)]$
$=f_1(x)+\lambda f_2(x)-[f_1(2-x)+\lambda f_2(2-x)]=f(x)-f(2-x)$. Donc $f\in B_{\mathbb{R}}$.

c. On a $\{\begin{pmatrix}z_1\\z_2\end{pmatrix}\in\mathbb{C}^2$ tel que $\bar{z_1}+z_2=0\}$
$=\{\begin{pmatrix}x_1+iy_1\\x_2+iy_2\end{pmatrix}\in\mathbb{C}^2$ tel que $x_1-iy_1=x_2+iy_2\}$
$=\{\begin{pmatrix}x_1+iy_1\\x_1-iy_1\end{pmatrix}\in\mathbb{C}^2$ pour $x_1,y_1\in\mathbb{R}\}$
$=\mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left\{\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}i\\-i\end{pmatrix}\right\}$ est bien un $\mathbb{R}$-ev.

2) a. $A_{\mathbb{C}}=\{(x,y,z)\in\mathbb{C}^3$ tel que $(x+y+z)^2+(x-y)^2=0\}$ n'est pas un $\mathbb{C}$-espace vectoriel.
En effet, $u_1=\begin{pmatrix}i\\0\\1-i\end{pmatrix}\in A_{\mathbb{C}}$ car $(i+1-i)^2+i^2=0$
et $u_2=\begin{pmatrix}1\\-1\\2i\end{pmatrix}\in A_{\mathbb{C}}$ car $(1-1+2i)^2+(1+1)^2=0$.
Mais pas leur somme $u_1+u_2=\begin{pmatrix}1+i\\-1\\1+i\end{pmatrix}\notin A_{\mathbb{C}}$ car vérifie $(1+2i)^2+(2+i)^2=8i\neq 0$.

b. Les mêmes arguments montre que $B_{\mathbb{C}}=\{f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ tel que $\forall x\in\mathbb{R}, f(x^2)=f(x)-f(2-x)\}$ est bien un $\mathbb{C}$-ev.
Non vide : La fonction nulle $f_0: x\mapsto 0$ vérifie $\forall x\in\mathbb{R}, f_0(x^2)=f_0(x)-f_0(2-x)$.
Stable par C.L. : Soit $f_1,f_2\in B_{\mathbb{C}}$ et $\lambda\in\mathbb{C}$. On note $f=f_1+\lambda f_2$.
Pour $x\in\mathbb{R}$, $f(x^2)=f_1(x^2)+\lambda f_2(x^2)=[f_1(x)-f_1(2-x)]+\lambda[f_2(x)-f_2(2-x)]$
$=f_1(x)+\lambda f_2(x)-[f_1(2-x)+\lambda f_2(2-x)]=f(x)-f(2-x)$. Donc $f\in B_{\mathbb{C}}$.

c. L'ensemble $C_{\mathbb{C}}=\{\begin{pmatrix}z_1\\z_2\end{pmatrix}\in\mathbb{C}^2$ tel que $\bar{z_1}+z_2=0\}$. n'est pas compatible au produit par $i\in\mathbb{C}$. Par exemple, $u=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\in C_{\mathbb{C}}$ mais $iu=\begin{pmatrix}i\\i\end{pmatrix}\notin C_{\mathbb{C}}$. Donc ce n'est pas un $\mathbb{C}$-ev.

Exercice 2 : 1) On montre que F est non-vide et stable par combinaison linéaire.
La fonction nulle g_0 est bien de classe C^1 et vérifie $\int_0^1 g_0=g_0(0)=g_0'(1)=0$ i.e. $g_0\in F$.
Soient $g_1,g_2\in F$ et $\lambda\in\mathbb{R}$ alors pour $f=g_1+\lambda g_2$, on a :
$\int_0^1 f=\int_0^1 g_1+\lambda\int_0^1 g_2=0$, $f(0)=g_1(0)+\lambda g_2(0)=0$ et $f'(1)=g_1'(1)+\lambda g_2'(1)=0$.
Donc $f\in F$.

Puis G est un ss-$\mathbb{R}$-ev en tant qu'espace engendré.

2) Soit $f\in F\cap G$. On a $f=af_0+bf_1+cf_2$ avec $a,b,c\in\mathbb{R}$ car $f\in G$.
Puis $f(t)=a+bt+ct^2$ avec $f\in F$. Donc $0=f(0)=a$, $0=f'(1)=b+2c$ et $0=\int_0^1 f=a+\frac{b}{2}+\frac{c}{3}$. Ce système homogène a trois équations et trois inconnues admet pour unique solution $a=b=c=0$. Donc $f=0$ est la fonction nulle.

3) Soit $f\in E$. On recherche $a,b,c\in\mathbb{R}$ tels que $f-af_0-bf_1-cf_2\in F$.

$$\begin{cases}\int_0^1 f(t)-a-bt-ct^2\,\mathrm{d}t &=0\\ f(0)-a &=0\\ f'(1)-b-2c &=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a+\frac{b}{2}+\frac{c}{3} &=\int_0^1 f\\ a &=f(0)\\ b+2c &=f'(1)\end{cases}$$

$\Leftrightarrow a = f(0), b = 3\int_0^1 f - \frac{f'(1)}{2}$ et $c = -\frac{3}{2}\int_0^1 f + \frac{3}{4}f'(1)$.
Ainsi on pose $g = f(0)f_0 + \left(3\int_0^1 f - \frac{f'(1)}{2}\right) f_1 + \left(-\frac{3}{2}\int_0^1 f + \frac{3}{4}f'(1)\right) f_2$ et on a $f = (f-g)+g \in F+G$.

Exercice 3 : 1) L'espace ambiant est de dimension 3 donc $\mathrm{rg}(u_1,u_2,u_3,u_4) \leq 3$. Ainsi le rang est différent du cardinal (égal à 4). Donc la famille est liée.

2) On calcul $\mathrm{rg}(u_1,u_2,u_3) = \mathrm{rg}\begin{pmatrix}1&1&2\\0&1&1\\2&3&4\end{pmatrix} = \mathrm{rg}\begin{pmatrix}1&1&2\\0&1&1\\0&1&0\end{pmatrix} = \mathrm{rg}\begin{pmatrix}1&1&2\\0&1&1\\0&0&-1\end{pmatrix} = 3$.
Donc la famille est génératrice.

3) On calcul $\mathrm{rg}(u_1,u_2,u_4) = \mathrm{rg}\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&1\\2&3&1\end{pmatrix} = \mathrm{rg}\begin{pmatrix}1&1&2\\0&1&1\\0&1&1\end{pmatrix} = \mathrm{rg}\begin{pmatrix}1&1&2\\0&1&1\\0&0&0\end{pmatrix} = 2$.
Donc la famille est n'est pas génératrice.

4) On a $\mathrm{rg}(\mathcal{B}) = 3 = \mathrm{Card}(\mathcal{B}) = \dim_{\mathbb{R}}\mathbb{R}^3$. Donc $\mathcal{B}$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
Puis on recherche $a_k, b_k, c_k \in \mathbb{R}$ tels que $e_k = a_k u_1 + b_k u_2 + c_k u_3$ décomposant la base canonique (e_1,e_2,e_3).
Pour $e_1 = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$ on trouve le système $\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&2&1\\0&1&1&0\\2&3&4&0\end{array}\right) \sim_L \left(\begin{array}{ccc|c}1&1&2&1\\0&1&1&0\\0&1&0&-2\end{array}\right)$.
Donc $b_1 = -2, c_1 = 2$ et $a_1 = -1$ c'est à dire $e_1 = -u_1 - 2u_2 + 2u_3 = \begin{pmatrix}-1\\-2\\2\end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$.
De même, on obtient : $e_2 = \begin{pmatrix}-2\\0\\1\end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$ et $e_3 = \begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$.