Semaine 22 - Du 25 au 29 Mars 2024

Les espaces de dimension finie

Révision de la semaine 21

Les applications linéaires

Généralités

Définitions et conditions minimales : $f(u + \lambda v) = f(u) + \lambda f(v)$.
L'ensemble $\mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E, F)$ est un $\mathbb{K}$-espace-vectoriel.
Composition d'applications linéaires et distributivité des opérations.
Puissances et polynômes d'un endomorphisme de $\mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E)$.
$\mathrm{Ker} f$, $\mathrm{Im} f$ et l'image d'un sous-$\mathbb{K}$-espace-vectoriel sont des sous-$\mathbb{K}$-espace-vectoriel.
Lien entre l'injectivité (resp. la surjectivité) et les sous-espaces $\mathrm{Ker} f$ (resp. $\mathrm{Im} f$).

Définition d'un morphisme $\mathbb{K}$-linéaire

Construction par l'image d'une base.
Construction par la restriction à des espaces supplémentaires.
Définition des homothéties, des symétries et des projecteurs.
Caractérisation par $s^2 = id$ et par $p^2 = p$.

Isomorphismes entres espaces vectoriels

Définition d'isomorphisme, d'automorphisme et du groupe linéaire $GL(E)$.
Stabilité par composition et inverse. Caractérisation par l'image d'une base.
Caractérisation des isomorphismes $f : E \to F$ comme vérifiant deux des trois propriétés :
$\mathrm{Ker} f = \{0\}$, $\mathrm{Im} f = F$ et $\dim E = \dim F$.

Liste de Questions de cours :

a) Enoncer et démontrer la caractérisation des bases à l'aide de la dimension.(Thm 1.5)
b) Enoncer et démontrer les majorations connues sur le rang d'une famille.(Prop 2.2)
c) Enoncer et démontrer la formule de Grassmann.
d) Montrer que $\mathrm{Ker} f$ et $\mathrm{Im} f$ sont des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels.
e) Montrer que $p^2 = p$ ssi p est le projecteur sur $\mathrm{Im} p$ le long de $\mathrm{Ker} p$.
f) En étudiant l'application $M \mapsto M^T$, montrer que $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) = \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \oplus \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$.