DS7 - Corrigé

Exercice 1 :

1. On a $u = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in F_1$ ssi $u = \begin{pmatrix} z \\ z \\ z \end{pmatrix} = zu_1$. Donc $F_1 = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}(u_1)$.
   On a $u = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in F_2$ ssi $u = \begin{pmatrix} -y+z \\ y \\ z \end{pmatrix}$. Donc $F_2 = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left[\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right]$.
   Donc F_1 et F_2 sont des $\mathbb{R}$-ev en tant qu'espace engendré.
2. On a déjà vu que $F_1 = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}(u_1)$ avec $u_1 \neq 0_E$ i.e. (u_1) est une base de F_1.
   On a F_2 est de dimension 2 d'après l'expression précédente. De plus $u_2, u_3 \in F_2$ en vérifiant la condition $x + y - z = 0$. Donc $F_2 = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}(u_2, u_3)$ d'après la caractérisation des égalités des $\mathbb{R}$-ev. Ainsi (u_2, u_3) est une base de F_2.
3. On a $\mathrm{rg}_{\mathbb{R}}(u_1, u_2, u_3) = \mathrm{rg}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = 3 = \dim_{\mathbb{R}}\mathbb{R}^3 = \mathrm{Card}\,\mathcal{B}$.
   Donc $\mathcal{B}$ est une base par caractérisation des bases.
   On en déduit que $\mathbb{R}^3 = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}(u_1, u_2, u_3) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}(u_1) \oplus \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}(u_2, u_3) = F_1 \oplus F_2$.
   C'est à dire F_1 et F_2 sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$.
4. On note $\mathcal{B}_0 = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique.
   On observe que $u_1 - u_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = e_2$ et $u_1 - u_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = e_1$.
   On en déduit que $e_1 = u_1 - u_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$, $e_2 = u_1 - u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$
   et $e_3 = u_2 - e_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}} - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$.

Exercice 2 :

1. On note $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. On a $F = \{aJ + bI_3 \text{ pour } a, b \in \mathbb{R}\} = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}(J, I_3)$.
   On montre que G est non vide et stable par combinaison linéaire.
   En effet, $(0) \in G$ car $0 + 0 + 0 = 0 + 0 + 0 = 0$.
   Pour deux matrices $A = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{pmatrix}$, $A' = \begin{pmatrix} x_1' & x_2' & x_3' \\ y_1' & y_2' & y_3' \\ z_1' & z_2' & z_3' \end{pmatrix} \in G$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.
   La matrice $A + \lambda A' = \begin{pmatrix} x_1 + \lambda x_1' & x_2 + \lambda x_2' & x_3 + \lambda x_3' \\ y_1 + \lambda y_1' & y_2 + \lambda y_2' & y_3 + \lambda y_3' \\ z_1 + \lambda z_1' & z_2 + \lambda z_2' & z_3 + \lambda z_3' \end{pmatrix}$ vérifie les 2 conditions :
   $(x_1 + \lambda x_1') + (y_2 + \lambda y_2') + (z_3 + \lambda z_3') = (x_1 + y_2 + z_3) + \lambda(x_1' + y_2' + z_3') = 0$
   et $(x_2 + \lambda x_2') + (y_3 + \lambda y_3') + (z_1 + \lambda z_1') = (x_2 + y_3 + z_1) + \lambda(x_2' + y_3' + z_1') = 0$
   Donc $A + \lambda A' \in G$.
2. On commence par montrer que $F \cap G = \{(0)\}$.
   Soit $A \in F \cap G$. Il existe $a, b \in \mathbb{R}$ tel que $A = aJ + bI_3$.
   Puis les 2 conditions donnent $3a + 3b = 3a = 0$. Donc $a = b = 0$ et $A = (0)$.
   On démontre ensuite que $F + G = E$.
   Soit $M = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.
   On recherche $a, b \in \mathbb{R}$ tel que $M = (aJ + bI_3) + (M - aJ - bI_3) \in F + G$.
   Cette décomposition convient ssi $M - aJ - bI_3 \in G$

ssi $\begin{cases} (x_1 - a - b) + (y_2 - a - b) + (z_3 - a - b) & = 0 \\ (x_2 - a) + (y_3 - a) + (z_1 - a) & = 0 \end{cases}$

ssi $\begin{cases} a & = \dfrac{1}{3}(x_2 + y_3 + z_1) \\ b & = \dfrac{1}{3}(x_1 + y_2 + z_3) - \dfrac{1}{3}(x_2 + y_3 + z_1) \end{cases}$.

Donc on dispose bien d'une telle décomposition et la somme est totale.

3. La famille (J, I_3) est libre car les vecteurs ne sont pas colinéaires. On en déduit que $\dim_R F = 2$.

   Puis $\dim_{\mathbb{R}} G = \dim_{\mathbb{R}} E - \dim_{\mathbb{R}} F = 9 - 2 = 7$ car les espaces sont supplémentaires.

Exercice 3 :

1. Soit $u \in E_1 \cap E_2$. On a $0_E = f(u) - \lambda_k u$ par définition du noyau.
   Donc $\lambda_1 u = f(u) = \lambda_2 u$. Puis $(\lambda_2 - \lambda_1)u = 0_E$ avec $\lambda_2 - \lambda_1 \neq 0$.
   Ainsi $u = 0_E$. Donc la somme est directe.

2. On a $H_2 = E_1 + E_2 = E_1 \oplus E_2$ d'après la question 1.
   Soit $u \in H_2 \cap E_3$.
   On dispose d'une décomposition de la forme $u = u_1 + u_2$ avec $u_1 \in E_1$ et $u_2 \in E_2$.
   Or la définition des noyaux donne :
   D'une part :$f(u) = \lambda_3 u = \lambda_3 u_1 + \lambda_3 u_2$ car $u \in E_3$.
   D'autre part : $f(u) = f(u_1 + u_2) = f(u_1) + f(u_2) = \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2$ car $u_1 \in E_1$ et $u_2 \in E_2$.
   Ainsi $\lambda_3 u_1 + \lambda_3 u_2 = \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 \in E_1 \oplus E_2$.
   La décomposition étant unique, on en déduit que $\lambda_3 u_1 = \lambda_1 u_1$ et $\lambda_3 u_2 = \lambda_2 u_2$.
   Puis comme $\lambda_3 \neq \lambda_1$ alors $u_1 = 0_E$ et de même $\lambda_3 \neq \lambda_2$ donc $u_2 = 0_E$.
   Ainsi $u = u_1 + u_2 = 0_E$.

3. On observe que $H_3 = E_1 + E_2 + E_3 = H_2 + E_3$.
   Donc on a $\dim(H_3) = \dim(H_2 + E_3) = \dim(H_2) + \dim(E_3)$ car ils sont en somme directe (question 2.)
   Puis $\dim(H_2) = \dim(E_1) + \dim(E_2)$ car E_1 et E_2 sont en somme directe (question 1.)
   Ainsi $\dim(H_3) = \dim(E_1) + \dim(E_2) + \dim(E_3)$.

4. On démontre par récurrence sur k que $H_k = \bigoplus_{i=1}^{k} E_i$.

   Initialisation $(k = 1)$ est vrai par définition $H_1 = E_1$.
   $(k = 2)$ $H_2 = E_1 \oplus E_2$ à été traité à la question 1.
   $(k = 3)$ $H_3 = E_1 \oplus E_2 \oplus E_3$ à été traité à la question 2.

   Hérédité On suppose acquis $H_k = \bigoplus_{i=1}^{k} E_i$.

   On a $H_{k+1} = H_k + E_{k+1}$. Il suffit d'avoir $H_k \cap E_{k+1} = \{0_E\}$ pour obtenir $H_{k+1} = H_k \oplus E_{k+1} = \bigoplus_{i=1}^{k} E_i \oplus E_{k+1} = \bigoplus_{i=1}^{k+1} E_i$.
   Soit $u \in H_k \cap E_{k+1}$. On a $f(u = \lambda_{k+1} u$ car $u \in E_{k+1}$.
   Et $u = \sum_{i=1}^{k} u_i$. Donc $f(u) = \sum_{i=1}^{k} f(u_i) = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i u_i$.

Ainsi on obtient $\sum_{i=1}^{k} \lambda_i u_i = f(u) = \lambda_{k+1} \sum_{i=1}^{k} u_i = \sum_{i=1}^{k} \lambda_{k+1} u_i \in \bigoplus_{i=1}^{k} E_i$.
Par définition de la somme directe, la décomposition est unique donc $\lambda_i u_i = \lambda_{k+1} u_i$ puis $u_i = 0_E$ car les scalaires sont distincts. Ainsi $u = \sum_{i=1}^{k} u_i = 0_E$.

5. On montre par récurrence immédiate que $\dim_{\mathbb{R}} H_p = \sum_{k=1}^{p} \dim_{\mathbb{R}} E_k$. Or H_p est un sous-espace de E. Donc $\dim H_p \leq \dim E$. Ainsi $\sum_{k=1}^{p} \dim_{\mathbb{R}} E_k \leq \dim_{\mathbb{R}} E$

Problème I : 1. (a) Soit $u_1 = \left(\begin{smallmatrix} x_1 \\ y_1 \end{smallmatrix}\right), u_2 = \left(\begin{smallmatrix} x_2 \\ y_2 \end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{R}^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. On a $f(u_1 + \lambda u_2) = f\begin{pmatrix} x_1+\lambda x_2 \\ y_1+\lambda y_2 \end{pmatrix}$
$= \begin{pmatrix} 3(x_1+\lambda x_2)-(y_1+\lambda y_2) \\ (x_1+\lambda x_2)+2(y_1+\lambda y_2) \\ -2(x_1+\lambda x_2)-(y_1+\lambda y_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x_1-y_1 \\ x_1+2y_1 \\ -2x_1-y_1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 3x_2-y_2 \\ x_2+2y_2 \\ -2x_2-y_2 \end{pmatrix} = f(u_1) + \lambda f(u_2)$.

(b) Soit $u = \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{R}^2$. On a $u \in \mathrm{Ker} f$ ssi $f(u) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ ssi $\begin{cases} 3x + y & = 0 \\ x + 2y & = 0 \\ -2x - y & = 0 \end{cases}$ ssi $x = y = 0$.

Donc $\mathrm{Ker} f = \{\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)\}$.

(c) On a $\mathrm{Im} f = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}} \left(f\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right), f\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)\right) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}} \left(\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}\right)$ est de dimension 2 car les vecteurs ne sont pas colinéaires. Si l'on note $P = \left\{\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \text{ tel que } 3a + 5b + 7c = 0\right\}$, on peut démontrer que c'est également un plan vectoriel. Puis $\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \in P$ car $3.3 + 5 - 2.7 = 0$ et $\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \in P$ car $-3 + 5.2 - 7 = 0$. Donc $\mathrm{Im} f \subset P$ et par caractérisation par la dimension, on obtient $\mathrm{Im} = P$.

(d) $\mathrm{Ker} f = \{0\}$ donc f est injective.
$\mathrm{Im} f \neq \mathbb{R}^3$ donc f n'est pas surjective.

2. (a) Par le calcul, on trouve $g\begin{pmatrix} x_1+\lambda x_2 \\ y_1+\lambda y2 \\ z_1+\lambda z_2 \end{pmatrix} = ... = g\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} + \lambda g\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix}$.

(b) Le noyau est déterminé par le système $\begin{cases} x + y + z & = 0 \\ x + 3y + 3z & = 0 \end{cases}$ ssi $\begin{cases} x & = 0 \\ y & = -z \\ z & \in \mathbb{R} \end{cases}$.

D'où $\mathrm{Ker}(g) = \mathrm{Vect}\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

(c) Le noyau montrer que g n'est donc pas surjective.
L'image est $\mathrm{Im} g = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}} [\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 3 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 3 \end{smallmatrix}\right)] = \mathbb{R}^2$ par dimension car les deux premiers vecteurs sont non colinéaires. Donc g est une application surjective.

3. (a) On sait que $\mathrm{Ker} g$ et $\mathrm{Im} f$ dont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$ car les applications sont linéaires. On a les dimensions d'après les questions précédentes. $\dim \mathrm{Ker} g = \dim \mathrm{Vect}\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = 1$ et $\dim \mathrm{Im} f = \dim P = 2$. Montrons qu'ils sont en somme directe. Soit $u \in \mathrm{Ker} g \cap \mathrm{Im} f$. On a $u = \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\lambda \\ \lambda \end{pmatrix}$ car $u \in \mathrm{Ker} g$. Puis $-5\lambda + 7\lambda = 0$

car $u \in \mathrm{Im}f = P$. Donc $\lambda = 0$ puis $u = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Par caractérisation par la dimension $\dim\mathbb{R}^3 = \dim\mathrm{Ker}g + \dim\mathrm{Im}f$, on a montré que $\mathbb{R}^3 = \mathrm{Ker}g \oplus \mathrm{Im}f$.

(b) Par le calcul, on trouve $g \circ f \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (3x-y)+(x+2y)+(-2x-y) \\ (3x-y)+3(x+2y)+3(-2x-y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \end{pmatrix}$. Ainsi $g \circ f = 2id_{\mathbb{R}^2}$ est une homothétie de rapport 2.

Par le calcul, on trouve $f \circ g \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3(a+b+c)-(a+3b+3c) \\ (a+b+c)+2(a+3b+3c) \\ -2(a+b+c)-(a+3b+3c) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a \\ 3a+7b+7b \\ -3a-5b-5c \end{pmatrix}$.

(c) On peut le montrer par le calcul ou formellement à l'aide de $g \circ f = 2id$.
En effet, si $u \in \mathrm{Ker}g$ alors $\psi(u) = f(g(u)) = f(0) = 0$ donc $u \in \mathrm{Ker}\psi$.
Réciproquement, si $u \in \mathrm{Ker}\psi$ alors $f(g(u)) = 0$ donc $2g(u) = \varphi(g(u)) = g(f(g(u))) = g(0) = 0$. Donc $u \in \mathrm{Ker}g$.
Puis, si $u \in \mathrm{Im}\psi$ alors $u = \psi(x) = f(g(x)) \in \mathrm{Im}f$ car c'est l'image de $g(x)$ par f.
Réciproquement, si $u \in \mathrm{Im}f$ alors $u = f(x) = f(\frac{1}{2}\psi(x)) = \frac{1}{2}f(g(f(x))) = \psi(\frac{1}{2}f(x)) \in \mathrm{Im}\psi$.

Problème II : 1. (a) On a $E \subset \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. On démontre qu'il est non vide et stable par combinaison linéaire.
La suite nulle $(0) \in E$ car elle admet 0 pour limite finie.
Soit $(u_n), (v_n) \in E$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. On a $(u_n + \lambda v_n)$ admet pour limite $\lim u_n + \lambda \lim v_n \in \mathbb{R}$ est finie. Donc $(u_n) + \lambda(v_n) \in E$.

(b) On a $G = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}(1)_{n\geq 0}$ est bien est ss-$\mathbb{R}$-ev de E. On peut montrer que $F \subset E$ est une ss-$\mathbb{R}$-ev car il est non vide et stable par combinaison linéaire.
Soit $u \in^F \cap G$. On a $u_n = \lambda$ car la suite est constante. Puis $\lim u_n = \lambda = 0$ car $u \in F$. Donc $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = 0$ i.e. $u = 0_E$.
Soit $u \in E$. On écrit $u = (u - \lambda(1)) + \lambda(1) \in F + G$. Pour que $u - \lambda(1) \in F$ admet pour limite 0, il suffit de prendre $\lambda = \lim\limits_{+\infty} u$.
Ainsi $E = F \oplus G$.

(c) L'application l existe bien car toutes les suites de E admettent bien une limite finie. Puis on a déjà remarquer que $\lim\limits_{+\infty}(u_n + \lambda v_n) = \lim\limits_{+\infty} u_n + \lambda \lim\limits_{+\infty} v_n$. Ce qui s'écrit également $l(u + \lambda v) = l(u) + \lambda l(v)$. Donc l est une application linéaire.

(d) Le noyau de l est par définition l'ensemble des suites de limites nulles i.e. $\mathrm{Ker}l = F$.
Puis $\mathrm{Im}l = l(E) = l(F + G) = l(\mathrm{Ker}l) + l(\mathrm{Vect}\,1) = 0 + \mathrm{Vect}\,(l(1)) = \mathbb{R}$ car $l(1) = 1$.

2. (a) Soit $u \in E$. On a $u_n \to l(u)$ donc $u_{n+1} \to l(u)$ comme suite extraire. Donc $T(u) \in E$ et l'application existe.
Puis pour $u, v \in E$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Soit $n \in \mathbb{N}$. On a $T(u + \lambda v)_n = u_{n+1} + \lambda v_{n+1} = T(u)_n + \lambda T(v)_n$. Ainsi $T(u +_l ambdav) = T(u) +_l ambdaT(v)$.
Donc T est un endomorphisme de E.

(b) Soit $u \in E$. On a $T(u) = 0$ ssi $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = 0$ ssi $\forall n \geq 1, u_n = 0$ Donc $u = (u_0, 0, 0, ..., 0, ...)$ pour $u_0 \in \mathbb{R}$. Ainsi $\mathrm{Ker}T = \mathrm{Vect}\,(\delta)$ avec $\delta_n = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.
Donc l'application n'est pas injective.

(c) L'application est surjective. En effet pour $u \in E$. On pose $v_n = u_{n-1}$ si $n \geq 1$ et $v_0 = 0$. On a $u = T(v) \in \mathrm{Im}T$. Donc $E = \mathrm{Im}T$.

3. (a) Par équivalence successive, on a : λ est une valeur propre de T
ssi $\exists u \neq 0, T(u) = \lambda u$
ssi $\exists u \neq 0, (T - \lambda id_E)(u) = 0_E$
ssi $\exists u \neq 0, u \in \mathrm{Ker}(T - \lambda id_E)$
ssi $\mathrm{Ker}(T - \lambda Id_E) \neq \{0_E\}$

(b) On recherche $u \in E$ tel que $T(u) = \dfrac{1}{2}u$. i.e. $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \dfrac{1}{2}u_n$. Donc $u_n = \dfrac{u_0}{2^n}$ est une suite géométrique de raison $\lambda = 1/2$. Donc $\mathrm{Ker}(T - \dfrac{1}{2}id_E) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}(2^{-n})_{n\geq 0}$ car $2^{-n} \to 0$ est une suite de E qui engendre le sous-espace.

(c) De même, on obtient $u_n = u_0 2^n$ est géométrique de raison 2. Mais on doit également avoir $u \in E$. Si $u_0 > 0$ alors $u_n \to +\infty$ et si $u_0 < 0$ alors $u_n \to -\infty$. Donc on a nécessairement u_0 puis $u = 0_E$. Donc $\mathrm{Ker}(T - \dfrac{1}{2}id_E) = \{0_E\}$.

(d) On a $T(u) = \lambda u$ ssi $u_n = u_0 \lambda^n$ pour $u_0 \in \mathbb{R}$.
Si $\lambda \in]-1, 1]$ alors $\mathrm{Ker}(T - \lambda id_E) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}(\lambda^n)_{n\geq 0}$ car $\lambda^n \to 0$ (ou 1)
Si $\lambda \notin]-1, 1[$ alors la suite $|\lambda^n| \to +\infty$ donc n'admet pas de limite finie donc $u_0 = 0$ puis $u = 0_E$. Ainsi $\mathrm{Ker}(T - \lambda id_E) = \{0_E\}$
Si $\lambda = -1$ alors $(-1)^n$ n'admet pas de limite donc n'appartient pas à E et $u = 0_E$
Donc $\mathrm{Ker}(T - \lambda id_E) = \{0_E\}$.
Ainsi λ est valeur propre ssi $\mathrm{Ker}(T - \lambda id_E) \neq \{0_E\}$ ssi $\lambda \in]-1, 1]$.