Semaine 23 - Du 2 au 5 Avril 2024

Les applications linéaires

Révision de la semaine 22

Isomorphismes entres espaces vectoriels

Définition d'isomorphisme, d'automorphisme et du groupe linéaire $GL(E)$.
Stabilité par composition et inverse. Caractérisation par l'image d'une base.
Le caractère isomorphe de deux espaces est une relation d'équivalence.
En dimension finie, les espaces isomorphes sont ceux de même dimensions.
Caractérisation des isomorphismes $f : E \to F$ comme vérifiant deux des trois propriétés : $\text{Ker}f = \{0\}$, $\text{Im}f = F$ et $\text{dim}E = \text{dim}F$.

Rang d'une application

Définition des application de rang finie $f : E \to F$ et $\text{rg}(f) = \dim(\text{Im}(f))$.
Si F est de dimension finie $\text{rg}(f) \leq \dim(F)$ avec égalité ssi f surjective.
Si E est de dimension finie $\text{rg}(f) \leq \dim(E)$ avec égalité ssi f injective.
Si $(e_1, ..., e_n)$ est une base de E alors $\text{rg}(f) = \text{rg}(f(e_1), ..., f(e_n))$.
Théorème du rang pour $f : E \to F$ avec E de dimension finie.

Liste de Questions de cours :

a) Montrer que $\text{Ker}f$ et $\text{Im}f$ sont des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels.

b) Montrer que $p^2 = p$ ssi p est le projecteur sur $\text{Im}p$ le long de $\text{Ker}p$.

c) En étudiant l'application $M \mapsto M^T$, montrer que $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) = \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \oplus \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$.

d) Montrer qu'il existe un unique polynôme $P \in \mathbb{R}_n[X]$ qui passe par $n+1$ points fixés i.e. $\forall i \in [\![0, n]\!], P(a_i) = b_i$ avec $a_0, ..., a_n$ distincts et $b_0, ..., b_n$ quelconques.

e) Pour $f \in \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E, F)$ et $\mathcal{B}_E$ une base de E. Montrer que f est injective ssi $f(\mathcal{B}_E)$ est libre.

f) Enoncer et démontrer le théorème du rang.