Semaine 24 - Du 22 au 26 Avril 2024

Les applications linéaires

Révision de la semaine 23

Dénombrement

Soient A et B des ensembles finis.

Ensemble fini et cardinale

Lien entre cardinal et les ensembles de référence $\emptyset$ et $[\![1, n]\!]$.
Conséquence sur les cardinaux de l'injectivité et de la surjectivité de $f : A \to B$.
Equivalence de l'injectivité, de surjectivité et la bijectivité de $f : A \to B$ de même cardinal.

Opération sur les cardinaux

Cardinal de l'union disjointe et de l'union quelconque.
Cardinal de $A \times B$, le produit cartésien.
Cardinal de $\mathcal{P}(A)$, l'ensemble de parties de A.
Cardinal de $\mathcal{F}(A, B) = B^A$, l'ensemble des applications de A dans B.

Combinaisons et Arrangements

Nombres de p-listes d'éléments distincts parmi n éléments.
Nombres de parties de p éléments parmi n éléments.
Triangle de Pascal et formule du binôme.

Liste de Questions de cours :

a) Montrer qu'il existe un unique polynôme $P \in \mathbb{R}_n[X]$ qui passe par $n+1$ points fixés i.e. $\forall i \in [\![0, n]\!], P(a_i) = b_i$ avec $a_0, ..., a_n$ distincts et $b_0, ..., b_n$ quelconques.

b) Pour $f \in \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E, F)$ et $\mathcal{B}_E$ une base de E. Montrer que f est injective ssi $f(\mathcal{B}_E)$ est libre.

c) Enoncer et démontrer le théorème du rang.

d) Démontrer que $\operatorname{Card}(A \uplus B) = \operatorname{Card}(A) + \operatorname{Card}(B)$ pour A et B disjoints.

e) Démontrer la caractérisation des bijections :
$f : A \to B$ bijective ssi deux des trois f injective, f surjective, $\operatorname{Card} A = \operatorname{Card} B$.

f) Démontrer avec le dénombrement que $\binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}$ et $\binom{n}{p} + \binom{n+1}{p} = \binom{n+1}{p+1}$.