DM7 : Application linéaire
à rendre le Lundi 22 Avril 2024.

Exercice 1 : Soit E et F deux espaces vectoriels. On admet que le produit cartésien $E \times F$ est un espace vectoriel muni des opérations naturelles :
$(u_E, u_F) + \lambda(v_E, v_F) = (u_E + \lambda v_E, u_F + \lambda v_F) \in E \times F$.

1. Montrer que $G_1 = E \times \{0_F\}$ est un sous-espace de $E \times F$ isomorphe à E.
2. On note également $G_2 = \{0_E\} \times F$. Montrer que $G_1 \oplus G_2 = E \times F$.
3. On suppose désormais E et F de dimension finie. En déduire la dimension de $E \times F$.
4. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, déterminer la dimension de E^n.

Exercice 2 : On pourra utiliser les résultats de l'exercice précédent.
Soit $f_n : \mathbb{R}_n[X] \to \mathbb{R}_{n-1}[X] \times \mathbb{R}, P(X) \mapsto \left(\frac{1}{n}P'(X), \int_0^1 P\right)$ pour $n \geq 1$.

1. Montrer que f_n est un isomorphisme.
2. Justifier l'existence et l'unicité d'une suite de polynôme $(B_n)_{n\geq 0}$ vérifiant :
   $B_0 = 1, \quad B'_{n+1} = (n+1)B_n$ et $\int_0^1 B_n(t)\,\mathrm{d}t = 0$.
3. Calculer $B_1(X), B_2(X)$ et $B_3(X)$.
4. Montrer que ce sont tous des polynômes unitaires et préciser leurs degrés.
5. En raisonnant par récurrence et en calculant $f_n(B_n(1-X))$,
   montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, B_n(1-X) = (-1)^n B_n(X)$.
6. Avec la même méthode, montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, B_n(X+1) - B_n(X) = nX^{n-1}$.
7. En calculant de deux manière $S = \sum_{k=0}^{n-1} B_3(k+1) - B_3(k)$ retrouver la formule $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.