Semaine 26 et 27 - Du 13 au 24 Mai 2024

Questions de cours

1. Enoncer puis démontrer la formule de somme des carrés : $\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.
2. Enoncer puis démontrer la formule de factorisation : $a^n - b^n = (a - b) \sum_{k=0}^{n-1} a^k b^{n-1-k}$.
3. Montrer que $\forall 0 \leq p \leq n, \sum_{k=p}^n \binom{k}{p} = \binom{n+1}{p+1}$.
4. Montrer que $\sum_{k \text{ pair}} \binom{n}{k} = \sum_{k \text{ impair}} \binom{n}{k} = 2^{n-1}$.
5. Enoncer puis démontrer l'inégalité triangulaire : $||z_1| - |z_2|| \leq |z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$.
6. Enoncer puis démontrer la compatibilité de la conjugaison aux passages à la puissance.
7. Enoncer la formule de trigonométrie : $\sin(p) + \sin(q) = \dots$ puis démontrer la à l'aide des formules d'Euler et de la technique de l'arc moitié.
8. Calculer la valeur de $\sum_{k=0}^n \cos(kx)$ pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$.
9. Résoudre sur $\mathbb{C}$ l'équation $\exp(z) = 3 - i\sqrt{3}$.
10. Résoudre sur $\mathbb{C}$ l'équation $(z + i)^n = (z - i)^n$ pour $n \in \mathbb{N}$.
11. Démontrer que la composée de deux injections (resp. surjections, bijections) est une injection (resp. surjection, bijection).
12. Montrer que la fonction sinus est dérivable sur $\mathbb{R}$ en admettant $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$.
13. Enoncer puis démontrer la formule de la dérivée d'un produit.
14. En tant que bijection réciproque, démontrer que la fonction Arcsin est dérivable sur $] - 1, 1[$ et calculer sa dérivée.
15. Montrer que th réalise une bijection de $\mathbb{R}$ vers $] - 1, 1[$. En calculant sa dérivée, montrer que $\text{th}^{-1}(y) = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{1+y}{1-y} \right)$.
16. Enoncer puis démontrer la Formule de Leibniz.
17. Déterminer des primitives de $x \mapsto e^{ax} \cos(bx)$ et $x \mapsto e^{ax} \sin(bx)$.
18. Enoncer et démontrer la formule d'intégration par parties puis calculer $\int_0^x \text{Arctan}(t) dt$.
19. Enoncer et démontrer la formule de changement de variables puis calculer $\int_0^x \frac{1}{1+e^t} dt$.
20. Enoncer et démontrer le principe de superposition pour l'ordre 1.
21. Enoncer et démontrer les solutions homogènes d'une EDL1 à coefficients non constants.
22. Enoncer et démontrer les solutions homogènes d'une EDL2 à coefficients constants sur $\mathbb{C}$.
23. Déterminer les bornes supérieure et inférieure de $A = \left\{ \frac{1}{p} + \frac{1}{q} \text{ pour } p, q \in \mathbb{N}^* \right\}$.
24. Montrer que si A est un convexe majoré sans maximum et minoré avec minimum alors $A = [\min A, \sup A[$.
25. Déterminer une expression explicite de la suite de Fibonacci.
26. Démontrer l'unicité de la limite d'une suite.
27. Démontrer le résultat sur la limite d'un produit de deux suites (cas limites finies).
28. Enoncer puis démontrer le théorème de limite monotone pour les suites.
29. Enoncer puis démontrer le théorème des suites adjacentes.
30. Enoncer et démontrer le résultat de composée des limites.
31. Enoncer puis démontrer le théorème d'encadrement pour les fonctions.
32. Trouver les fonctions f continue en 0 telles que $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = f(2x)$.
33. Enoncer puis démontrer le Théorème des Valeurs Intermédiaires sur un segment $[a, b]$.
34. Enoncer puis démontrer le Théorème de Rolle (sans utiliser le TAF).
35. Enoncer puis démontrer le Théorème des accroissements finies.
36. Enoncer et démontrer le résultat de prolongement de la dérivabilité.
37. Montrer que si f est convexe alors f est continue.
38. On suppose f dérivable. Montrer que f est convexe ssi f' est croissante.
39. Enoncer et démontrer l'associativité et la distributivité du produit matriciel.

40. Démontrer que pour $M \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$, $M^{a+b} = M^a M^b$ et $M^{ab} = (M^a)^b$.
41. Énoncer et démontrer la formule du binôme de Newton pour deux matrices qui commutent.
42. Démontrer la stabilité des matrices triangulaires par les opérations.
43. Énoncer et démontrer les formules $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ et $(A^n)^{-1} = (A^{-1})^n$.
44. Montrer que T triangulaire est inversible ssi tous les coefficients diagonaux sont non nuls.
45. Montrer que l'équivalence par lignes est une relation d'équivalence.
46. Programmer en Python le crible d'Eratosthène et montrer qu'il existe une infinité de nombres premiers.
47. Démontrer que $\deg(P \times Q) = \deg P + \deg Q$.
48. Démontrer la règle de Leibniz $(PQ)' = P'Q + PQ'$ avec la définition formelle.
49. Énoncer et démontrer le lien entre l'annulation des dérivées et la multiplicité d'une racine.
50. Énoncer et démontrer la formule de Taylor.
51. Démontrer la croissance comparée $\ln(x) =_{x \rightarrow +\infty} o(x^\beta)$ si $\beta > 0$.
52. Démontrer l'unicité du développement limité.
53. Énoncer et démontrer le résultat sur le produit des développements limités.
54. Énoncer et démontrer la formule de Taylor-Young.
55. Calculer $\ln^{(k)}(2)$ pour tout $k \in \mathbb{N}$ à l'aide de la formule de Taylor-Young.
56. Montrer que les solutions de $y'' - 3y' + 2y = 0$ forme un $\mathbb{R}$ -ev. (2 méthodes)
57. Montrer qu'une famille de polynôme échelonné en degré est libre.
58. Montrer que si $\mathcal{B}_1$ est une base de F_1 , $\mathcal{B}_2$ est une base de F_2 et $E = F_1 \oplus F_2$ alors $\mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2$ est une base de E .
59. Énoncer et démontrer la caractérisation des bases à l'aide de la dimension. (Thm 1.5)
60. Énoncer et démontrer les majorations connues sur le rang d'une famille. (Prop 2.2)
61. Énoncer et démontrer la formule de Grassmann.
62. Montrer que $\text{Ker } f$ et $\text{Im } f$ sont des $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels.
63. Montrer que $p^2 = p$ ssi p est le projecteur sur $\text{Im } p$ le long de $\text{Ker } p$.
64. En étudiant l'application $M \mapsto M^T$, montrer que $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) = \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \oplus \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$.
65. Montrer qu'il existe un unique polynôme $P \in \mathbb{R}_n[X]$ qui passe par $n + 1$ points fixés i.e. $\forall i \in \llbracket 0, n \rrbracket, P(a_i) = b_i$ avec $a_0, \dots, a_n$ distincts et $b_0, \dots, b_n$ quelconques.
66. Pour $f \in \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E, F)$ et $\mathcal{B}_E$ une base de E . Montrer que f est injective ssi $f(\mathcal{B}_E)$ est libre.
67. Énoncer et démontrer le théorème du rang.
68. Démontrer que $\text{Card}(A \uplus B) = \text{Card}(A) + \text{Card}(B)$ pour A et B disjoints.
69. Démontrer la caractérisation des bijections :
 $f : A \rightarrow B$ bijective ssi deux des trois f injective, f surjective, $\text{Card } A = \text{Card } B$.
70. Démontrer avec le dénombrement que $\binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}$ et $\binom{n}{p} + \binom{n+1}{p} = \binom{n+1}{p+1}$.
71. Énoncer et démontrer la formule des probabilités composées pour n événements.
72. Énoncer et démontrer les formules des probabilités totales et de Bayes pour un SCEI.
73. Montrer que l'indépendance mutuellement de n événements entraîne l'indépendance deux à deux et que la réciproque est fautive.
74. Montrer que si $X_k \sim \mathcal{B}(p)$ sont mutuellement indépendantes alors $S_n = \sum_{k=1}^n X_k \sim \mathcal{B}(n, p)$.
75. Définir $X \sim \mathcal{B}(n, p)$ puis calculer $\mathbb{E}(X)$ et $\mathbb{V}(X)$.
76. Définir $X \sim \mathcal{U}(\llbracket 1, n \rrbracket)$ puis calculer $\mathbb{E}(X)$ et $\mathbb{V}(X)$.

Méthode de cours

1. Résoudre une EDL1 à coefficients non constants.
2. Résoudre une EDL2 à coefficients constants.
3. Déterminer l'expression explicite d'une suite récurrente linéaire d'ordre 2.
4. Étudier une suite autonome $u_{n+1} = f(u_n)$ avec $u_0 \in I$ un intervalle stable.
5. Inverser une matrice à l'aide de l'algorithme du Pivot de Gauss-Jordan.
6. Calculer A^n à l'aide d'un polynôme annulateur $\chi(A) = 0$.
7. Résoudre une équation diophantienne linéaire avec les thm de Bézout et de Gauss.
8. Calculer le développement limité d'une fonction en a à l'ordre n .