

DM8 (libre) : Probabilités

à rendre le Lundi 13 Mai 2024.

La calculette (i.e. une distribution Python) est autorisée pour les applications numériques à donner sous forme d'une fraction rationnelle.

Exercice 1 : On lance trois dés équilibrés à 6 faces. On note U le plus petit, V le plus grand et W la valeur intermédiaire. On a donc $U \leq W \leq V$ presque sûrement.

1. Ecrire un programme en Python qui simule la variable aléatoire U .
2. Pour $k \in \llbracket 1, 6 \rrbracket$, calculer $\mathbb{P}(V \leq k)$ et en déduire la loi de V .
3. Calculer l'espérance et la variance de V .
4. En déduire la loi l'espérance et la variance de U .
5. Déterminer $\mathbb{E}(W)$ et $\mathbb{P}(W = 1)$. La variable W suit-elle la loi d'un dé équilibré ?

Exercice 2 : On dispose d'un trousseau de n clés. Une seule de ces clés ouvre votre porte. On essaye successivement les clés jusqu'à ouvrir la porte et on note X le nombre d'essais nécessaire pour ouvrir la porte.

1. Déterminer la loi de X si l'on suppose que l'on essaye jamais deux fois la même clé.
2. Calculer l'espérance et la variance de X .
3. On met au point un logiciel qui recherche naïvement les mots de passe de 7 caractères parmi 128 symboles. Combien de tests doit exécuter votre logiciel pour découvrir le mot de passe avec une certitude de 95%.
4. On suppose désormais que les clés sont indiscernables et que l'on peut pas éviter de re-tester les clés. En calculant $\mathbb{P}(X \geq k)$, déterminer la (nouvelle) loi de X . Suivant cette hypothèse à quel instant a-t-on le plus de chance d'ouvrir la porte ?