Devoir Surveillé de Mathématiques n° 8
le samedi 27 Avril 2024 - durée 4h

Exercice 1 : On dispose un dé équilibré à 6 faces et d'une urne initialement vide. On réalise l'expérience suivante en 3 étapes :

— On lance une première fois le dé et on place autant de boule(s) rouge(s) dans l'urne que le numéro obtenu.
— On lance à nouveau le dé et on place autant de boule(s) verte(s) dans l'urne que ce second numéro.
— On extrait une boule de l'urne.

On note D_1 et D_2 les valeurs respectives des deux premiers lancés de dés. On note également l'événement $R =$"la boule extraite est rouge".

1. Montrer que $\{(D_1 = 1), ..., (D_1 = 6)\}$ forme un SCEI de 6 événements.
2. Déterminer les probabilités des trois événements $(D_1 = D_2)$, $(D_1 < D_2)$ et $(D_1 > D_2)$.
3. Montrer que $\{(D_1 = k_1) \cap (D_2 = k_2)\}_{1 \leq k_1, k_2 \leq 6}$ forme un SCEI de 36 événements.
4. En déduire que $\mathbb{P}(R) = \dfrac{1}{36} \displaystyle\sum_{k_1=1}^{6} \sum_{k_2=1}^{6} \frac{k_1}{k_1 + k_2}$.
5. En calculant également $\mathbb{P}(\bar{R})$ et en effectuant l'échange des variables $k_1 \leftrightarrow k_2$, déterminer la valeur de $\mathbb{P}(R)$.
6. Déterminer la probabilité sachant R que $(D_1 = D_2)$.
   Ces deux événements sont-ils indépendants ?

Exercice 2 : On se place dans $E = \mathbb{R}^3$ et on note $\mathcal{B}_0 = (e_1, e_2, e_3)$ sa base canonique.
On introduit les vecteurs $u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix}, u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $u_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.
On note également $F = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}(u_1)$ et $G = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}(u_2, u_3)$.

1. (a) Montrer que la famille $\mathcal{B} = (u_1, u_2, u_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
   Que peut-on en déduire sur F et G ?
   (b) Déterminer les coordonnées des vecteurs de la base canonique dans la base $\mathcal{B}$.
   (c) On note $p : E \to E$ le projecteur sur G le long de F.
   Déterminer les coordonnées dans la base canonique du vecteur $p\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.
2. On note $q = id_E - p$ et $s = p - q$.
   (a) Montrer que q est un projecteur et préciser ses espaces propres.
   (b) Montrer que s est une symétrie et préciser ses espaces propres.
   (c) Déterminer les coordonnées dans la base canonique du vecteur $s\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.
3. (a) Justifier l'existence et l'unicité d'une application linéaire $f : E \to E$ vérifiant :
   $$f(u_1) = u_1, f(u_2) = u_3 \text{ et } f(u_3) = u_2$$
   (b) Calculer f^2, caractériser f et déterminer ses espaces propres dans la base $\mathcal{B}$.
   (c) Montrer que $f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8x+13y-2z \\ -7x-12y+2z \\ -14x-26y+5z \end{pmatrix}$.
4. (a) Calculer $f \circ p$ et $p \circ f$. Commenter.
   (b) En déduire que $s \circ f$ est une symétrie dont on précisera les espaces propres.
   (c) Pour $n \in \mathbb{N}$, calculer $(f + p)^n$ en fonction de la parité de n.

Problème I : On recherche à étudier l'application $\Delta : \mathbb{R}[X] \to \mathbb{R}[X], P(X) \mapsto P(X+1) - P(X)$.

1. (a) Montrer que Δ est un endomorphisme de $\mathbb{R}[X]$.
   (b) Déterminer le degré de $\Delta(P)$ en fonction de celui de P.
   En déduire le noyau de Δ.
2. Pour $n \in \mathbb{N}^*$. On note Δ_n la restriction de Δ à $\mathbb{R}_n[X]$.
   (a) Justifier que Δ_n définit bien un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.
   (b) En calculant le rang de Δ_n, montrer que $\mathrm{Im}\Delta_n = \mathbb{R}_{n-1}[X]$.
3. (a) Montrer que pour tout $P \in \mathbb{R}[X]$, il existe un unique $Q \in \mathbb{R}[X]$ tel que $\begin{cases} \Delta(Q) & = P \\ Q(0) & = 0 \end{cases}$.
   On définit ainsi l'application $\nabla : \mathbb{R}[X] \to \mathbb{R}[X], P \mapsto Q$.
   (b) Montrer que ∇ est un endomorphisme puis calculer $\Delta \circ \nabla$ et $\nabla \circ \Delta$.
   (c) Déterminer le noyau et l'image de ∇.
   (d) Montrer que pour tout $m \in \mathbb{N}, \nabla(P)(m+1) = \displaystyle\sum_{k=0}^{m} P(k)$.
4. On définit une suite de polynômes par :
   $$P_0 = 1,\ P_1 = X,\ P_2 = \frac{X(X-1)}{2}, \ldots,\ P_n = \frac{X(X-1)...(X-n+1)}{n!}.$$
   (a) Pour $n > 0$, calculer $\Delta(P_n)$ en fonction de P_{n-1}.
   (b) Pour $k, n \in \mathbb{N}$, calculer le polynôme $\Delta^k(P_n)$ selon si $k \leq n$ ou $k > n$.
   (c) Pour $k, n \in \mathbb{N}$, calculer le nombre $\Delta^k(P_n)(0)$.
5. (a) Justifier que $\mathcal{B} = (P_0, ..., P_n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.
   (b) En déduire que pour tout $P \in \mathbb{R}_n[X], P = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \Delta^k(P)(0) P_k$.
   (c) En déduire une expression de $\nabla(P)$ en fonction des coefficients $\lambda_k = \Delta^k(P)(0)$.
6. Application lorsque $n = 3$ et $P = X^3$.
   (a) Déterminer les coefficients $\lambda_0, ..., \lambda_3 \in \mathbb{R}$.
   (b) Calculer $\nabla(X^3)$ puis factoriser le sur $\mathbb{R}[X]$.
   (c) Retrouver la formule de la somme des cubes : $\displaystyle\sum_{k=1}^{m} k^3 = ...$