DS8 - Corrigé

Exercice 1 : 1. On a $(D_1=1)\cup ...\cup(D_1=6)=(D_1\in [\![1,6]\!])=\Omega$ et $(D_1=k)\cap(D_1=l)=\emptyset$ si $k\neq l$. Donc par définition $\{(D_1=1),...,(D_1=6)\}$ forme un SCEI.

2. On peut appliquer la FPT dans chacun des cas à ce SCEI :
$$\begin{aligned}\mathbb{P}(D_1=D_2)&=\sum_{k=1}^{6}\mathbb{P}(D_1=k)\mathbb{P}_{D_1=k}(D_2=D_1)\\&=\sum_{k=1}^{6}\frac{1}{6}\mathbb{P}_{D_1=k}(D_2=k)\\&=\frac{1}{6}\sum_{k=1}^{6}\frac{1}{6}=\frac{1}{6}.\end{aligned}$$
Puis $$\begin{aligned}\mathbb{P}(D_1>D_2)&=\sum_{k=1}^{6}\mathbb{P}(D_1=k)\mathbb{P}_{D_1=k}(D_1>D_2)\\&=\sum_{k=1}^{6}\frac{1}{6}\mathbb{P}_{D_1=k}(D_2<k)\\&=\frac{1}{6}\sum_{k=1}^{6}\frac{k-1}{6}=\frac{0+1+2+...+5}{36}=\frac{5}{12}.\end{aligned}$$
Enfin $\mathbb{P}(D_1<D_2)=1-\dfrac{1}{6}-\dfrac{5}{12}=\dfrac{5}{12}$ comme événement contraire des précédents.

3. On a $\Omega=\biguplus_{k_1=1}^{6}(D_1=k_1)=\biguplus_{k_2=1}^{6}(D_2=k_2)$ d'après la q1.

Donc $\Omega=\Omega\cap\Omega=\left(\biguplus_{k_1=1}^{6}(D_1=k_1)\right)\cap\left(\biguplus_{k_2=1}^{6}(D_2=k_2)\right)=\biguplus_{k_1,k_2}(D_1=k_1)\cap(D_2=k_2)$ justifiant le SCEI proposé par l'énoncé.

4. En appliquant la FPT sur ce nouveau SCEI, on obtient :
$$\begin{aligned}\mathbb{P}(R)&=\sum_{k_1=1}^{6}\sum_{k_2=1}^{6}\mathbb{P}\left((D_1=k_1)\cap(D_2=k_2)\right)\mathbb{P}_{(D_1=k_1)\cap(D_2=k_2)}(R)\\&=\sum_{k_1=1}^{6}\sum_{k_2=1}^{6}\frac{1}{6}\frac{1}{6}\frac{k_1}{k_1+k_2}=\frac{1}{36}\sum_{k_1=1}^{6}\sum_{k_2=1}^{6}\frac{k_1}{k_1+k_2}.\end{aligned}$$
En effet si $(D_1=k_1)$ et $(D_2=k_2)$ alors l'urne contient k_1 boules favorables et k_1+k_2 boules au total. Donc $\mathbb{P}_{(D_1=k_1)\cap(D_2=k_2)}(R)=\dfrac{k_1}{k_1+k_2}$.

5. Le même calcul conduit à $\mathbb{P}(\bar{R})=\dfrac{1}{36}\displaystyle\sum_{k_1=1}^{6}\sum_{k_2=1}^{6}\frac{k_2}{k_1+k_2}$.

Le changement de variables donne $\mathbb{P}(\bar{R})=\mathbb{P}(R)$. On en déduit que $\mathbb{P}(R)=1/2$. Le jeu est équilibré.

6. On utilise la formule de Bayes $\mathbb{P}_R(D_1 = D_2) = \dfrac{\mathbb{P}(D_1 = D_2)\mathbb{P}_{D_1=D_2}(R)}{\mathbb{P}(R)} = \dfrac{1/6 \times 1/2}{1/2} = \dfrac{1}{6}$. En effet, si $D_1 = D_2$ alors il y a autant de boules de chaque couleur donc le jeu est équilibré i.e. $\mathbb{P}_{D_1=D_2}(R) = 1/2$. Ainsi $\mathbb{P}_R(D_1 = D_2) = 1/6 = \mathbb{P}(D_1 = D_2)$ donc les événements sont indépendants.

Exercice 2 : 1. (a) On peut calculer le rang de la famille $\text{rg}(\mathcal{B}) = \text{rg}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & -1 \\ -3 & 3 & 1 \end{pmatrix} = ... = 3.$

On a ainsi $\text{rg}\mathcal{B} = \text{Card}\,\mathcal{B} = \dim E$ donc $\mathcal{B}$ est une base de E.

Puis $E = \text{Vect}_{\mathbb{R}}(u_1, u_2, u_3) = \text{Vect}_{\mathbb{R}}(u_1) \oplus \text{Vect}_{\mathbb{R}}(u_2, u_3) = F \oplus G$. Donc F et G sont supplémentaires dans E.

(b) On recherche $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ tel que $\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \\ z \end{smallmatrix}\right) = \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \lambda_3 u_3$. Ceci correspond au système $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & x \\ -1 & 0 & -1 & y \\ -3 & 3 & 1 & z \end{array}\right)$. Avec le pivot de Gauss-Jordan, on obtient l'unique solution $\lambda_1 = 3x + 5y - z, \lambda_2 = 4x + 7y - z$ et $\lambda_3 = -3x - 6y + z$.

Ainsi $e_1 = \left(\begin{smallmatrix} 3 \\ 4 \\ -3 \end{smallmatrix}\right)_{\mathcal{B}}, e_2 = \left(\begin{smallmatrix} 5 \\ 7 \\ -6 \end{smallmatrix}\right)_{\mathcal{B}}$ et $e_3 = \left(\begin{smallmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)_{\mathcal{B}}$.

(c) On a $\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \\ z \end{smallmatrix}\right) = (3x + 5y - z)u_1 + (4x + 7y - z)u_2 + (-3x - 6y + z)u_3 \in F \oplus G$.

Donc $p\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \\ z \end{smallmatrix}\right) = (4x + 7y - z)u_2 + (-3x - 6y + z)u_3 \in G$

$$= (4x + 7y - z)\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{smallmatrix}\right) + (-3x - 6y + z)\left(\begin{smallmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} -2x-5y+z \\ 3x+6y-z \\ 9x+15y-2z \end{smallmatrix}\right).$$

2. (a) On sait que q est linéaire par opération. Puis $q^2 = (id_E - p)^2 = id_E - 2p + p^2 = id_E - p$ car $p^2 = p$. Donc q est un projecteur.

   On recherche le noyau. Soit $u \in E$.

   On a $q(u) = 0_E$ ssi $u - p(u) = 0_E$ ssi $p(u) = u$ ssi $u \in G$.

   On recherche l'image.

   $Imq = \text{Vect}_{\mathbb{R}}(q(u_1), q(u_2), q(u_3)) = \text{Vect}_{\mathbb{R}}(u_1, u_2 - u_2, u_3 - u_3) = \text{Vect}_{\mathbb{R}}(u_1) = F$.

   Donc q est le projecteur sur F le long de G.

   (b) De même $s = p - q = 2p - id$ est une application linéaire par opération. Elle vérifie $s^2 = (2p - id)^2 = 4p^2 - 4p + id = id$ car $p^2 = p$. Ainsi s est une symétrie.

   On résout $s(u) = u$ ssi $2p(u) - u = u$ ssi $p(u) = u$ ssi $u \in \text{Im}p = G$.

   Et $s(u) = -u$ ssi $2p(u) - u = -u$ ssi $p(u) = 0$ ssi $u \in \text{Ker}p = F$.

   Ainsi s est la symétrie par rapport à G le long de F.

   (c) On a $s\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \\ z \end{smallmatrix}\right) = 2p\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \\ z \end{smallmatrix}\right) - \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \\ z \end{smallmatrix}\right) = 2\left(\begin{smallmatrix} -2x-5y+z \\ 3x+6y-z \\ 9x+15y-2z \end{smallmatrix}\right) - \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \\ z \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} -5x-10y+2z \\ 6x+11y-2z \\ 18x+30y-5z \end{smallmatrix}\right)$.

3. (a) Une application linéaire est entièrement déterminer par l'image d'une base. Donc f est fixée par $f(\mathcal{B})$.

   (b) On a $f^2(u_1) = f(u_1) = u_1$, $f^2(u_2) = f(u_3) = u_2$ et $f^2(u_3) = f(u_2) = u_3$. Donc $f^2 = id_E$ car ces deux applications coïncident sur une base.

   Soit $u = \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \lambda_3 u_3 \in E$.

On a $f(u) = u$ ssi $\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_3 + \lambda_3 u_2 = \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \lambda_3 u_3$

ssi $\begin{cases} \lambda_1 & = \lambda_1 \\ \lambda_2 & = \lambda_3 \\ \lambda_3 & = \lambda_2 \end{cases}$ ssi $\begin{cases} \lambda_1 & \in \mathbb{R} \\ \lambda_2 & = \lambda_3 \\ \lambda_3 & \in \mathbb{R} \end{cases}$ ssi $u = \lambda_1 u_1 + \lambda_3(u_2 + u_3)$ pour $\lambda_1, \lambda_3 \in \mathbb{R}$.

Ainsi $\mathrm{Ker}(f - id_E) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}(u_1, u_2 + u_3)$.

De même $f(u) = -u$ ssi $\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_3 + \lambda_3 u_2 = -\lambda_1 u_1 - \lambda_2 u_2 - \lambda_3 u_3$

ssi $\begin{cases} \lambda_1 & = -\lambda_1 \\ \lambda_2 & = -\lambda_3 \\ \lambda_3 & = -\lambda_2 \end{cases}$ ssi $\begin{cases} \lambda_1 & = 0 \\ \lambda_2 & = -\lambda_3 \\ \lambda_3 & \in \mathbb{R} \end{cases}$ ssi $u = \lambda_3(-u_2 + u_3)$ pour $\lambda_3 \in \mathbb{R}$.

Ainsi $\mathrm{Ker}(f + id_E) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}(-u_2 + u_3)$.

(c) Pour s'assurer que $f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8x+13y-2z \\ -7x-12y+2z \\ -14x-26y+5z \end{pmatrix}$, il suffit par unicité de vérifier que $f(u_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} = u_1$, $f(u_2) = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = u_3$ et $f(u_3) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} = u_2$.

4. (a) Méthode 1 : Un calcul explicite dans la base canonique donne
$p \circ f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5x+8y-z \\ -4x-7y+z \\ -5x-11y+2z \end{pmatrix} = f \circ p\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$. Les applications commutent.

Méthode 2 : On peut trouver avec moins de calcul les trois relations sur la base $\mathcal{B}$:
$p \circ f(u_1) = p(u_1) = 0_E$ et $f \circ p(u_1) = f(0_E) = 0_E$,
$p \circ f(u_2) = p(u_3) = u_3$ et $f \circ p(u_2) = f(u_2) = u_3$,
$p \circ f(u_3) = p(u_2) = u_2$ et $f \circ p(u_3) = f(u_3) = u_2$,
Donc les deux applications coïncident sur une base donc sont égales.

(b) On a $s = 2p - id_E$ et f commutent car f et p commutent. Puis $(s \circ f)^2 = s^2 \circ f^2 = id \circ id = id$. Donc $S = s \circ f$ est une symétrie.

On a $S\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} -\lambda_1 \\ \lambda_3 \\ \lambda_2 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$.

Donc $S(u) = u$ ssi $\lambda_1 = 0$ et $\lambda_2 = \lambda_3 \in \mathbb{R}$. Donc $\mathrm{Ker}(S - id) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}(u_2 + u_3)$.
De même on obtient $\mathrm{Ker}(S + id) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}(u_1, u_2 - u_3)$.

(c) On sait que f et p commutent donc d'après la formule du binôme de Newton :

$$(f+p)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^k p^{n-k} = f^n + \sum_{k<n \text{ pair}} \binom{n}{k} p + \sum_{k<n \text{ impair}} \binom{n}{k} f \circ p$$

Si n est pair alors $(f+p)^n = id_E + (2^{n-1} - 1)p + 2^{n-1} S$.
Si n est impair alors $(f+p)^n = f + 2^{n-1} p + (2^{n-1} - 1) S$.

Problème I : 1. (a) Soit $P_1, P_2 \in \mathbb{R}[X]$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.
On a $\Delta(P_1 + \lambda P_2) = (P_1 + \lambda P_2)(X+1) - (P_1 + \lambda P_2)(X) = P_1(X+1) - P_1(X) + \lambda[P_2(X+1) - P_2(X)] = \Delta P_1 + \lambda \Delta P_2$.
Donc Δ est bien un endomorphisme de $\mathbb{R}[X]$.

(b) On a $\Delta(X^k) = (X+1)^k - X^k = \sum_{l=0}^{k} \binom{k}{l} X^l - X^k = kX^{k-1} + ... + 1$ de degré $k-1$ si $k \geq 1$. Donc $\deg(\Delta P) = (\deg P) - 1$ par combinaison linéaire.
On a $\Delta P = 0$ ssi $P(X+1) = P(X)$ ssi P est constant.
En effet, si P admet une racine α alors $\alpha + n$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$ et P aurait une infinité

de racines. Donc P est nul ou n'a pas de racine i.e. P est constant.
Donc $\mathrm{Ker}\Delta = \mathbb{R}_0[X] = \mathrm{Vect}\,(1)$.

2. (a) On a $\Delta_n(\mathbb{R}_n[X]) \subset \mathbb{R}_{n-1}[X] \subset \mathbb{R}_n[X]$ car $\deg \Delta P = (\deg P) - 1$. Donc Δ_n est bien définit. Puis Δ_n est encore linéaire car c'est la même correspondance que Δ.

   (b) D'après le théorème du rang on a $\mathrm{rg}(\Delta_n) = \dim\mathbb{R}_n[X] - \dim\mathrm{Ker}\Delta_n = (n+1)-1 = n$. Or on a vu que $\mathrm{Im}\Delta_n = \Delta_n(\mathbb{R}_n[X]) \subset \mathbb{R}_{n-1}[X]$ par degré. Puis $\dim\mathrm{Im}\Delta_n = n = \dim\mathbb{R}_{n-1}[X]$. Donc par caractérisation, $\mathrm{Im}\Delta_n = \mathbb{R}_{n-1}[X]$.

3. (a) On fixe $P \in \mathbb{R}[X]$ et on recherche à résoudre l'équation linéaire $\Delta Q = P$. On note $n = \deg P + 1$. On a $P \in \mathbb{R}_{n-1}[X] = \mathrm{Im}\Delta_n$ donc il existe une solution particulière $Q_p \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que $\Delta Q_p = P$. Toutes les solutions de l'équation sont de la forme $Q_p + Q_0$ avec $Q_0 \in \mathrm{Ker}\Delta$. Donc $Q_0 = \lambda$ est une constante d'après q1b. Puis $Q(0) = 0$ impose la constante $\lambda = -Q_p(0)$ et l'unique solution est $Q(X) = Q_p(X) - Q_p(0)$.

   (b) Soit $P_1, P_2 \in \mathbb{R}[X]$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Notons $Q_1 = \nabla P_1$ et $Q_2 = \nabla P_2$. On sait que $\Delta(Q_1 + \lambda Q_2) = \Delta Q_1 + \lambda \Delta Q_2 = P_1 + \lambda P_2$ car Δ est linéaire. Puis $(Q_1 + \lambda Q_2)(0) = Q_1(0) + \lambda Q_2(0) = 0$. Ainsi $Q = Q_1 + \lambda Q_2$ est solution du système $\Delta Q = P_1 + \lambda P_2$ et $Q(0) = 0$. Par unicité, on en déduit que $\nabla(P_1 + \lambda P_2) = Q = Q_1 + \lambda Q_2 = \nabla Q_1 + \lambda \nabla Q_2$. Ainsi ∇ est linéaire.

   On a $\Delta(\nabla P) = \Delta Q = P$ par définition, donc $\Delta \circ \nabla = id$.

   Et $\nabla(\Delta Q) = Q(X) - Q(0)$ car $\Delta(Q + \lambda) = P$ mais on doit fixer $\lambda = -Q(0)$ pour avoir la deuxième condition.

   (c) Si $P \in \mathrm{Ker}\nabla$ alors $Q = \nabla P = 0$ puis $P = \Delta Q = \Delta 0 = 0$. Donc $\mathrm{Ker}\nabla = \{0\}$.
   On a $\mathrm{Im}\nabla = \{Q \in \mathbb{R}[X]$ tel que $Q(0) = 0\}$ par double inclusion.
   Par définition $(\subset)$ est toujours vrai.
   Si $Q \in \mathbb{R}[X]$ vérifie $Q(0) = 0$ alors $Q = Q(X) - Q(0) = \nabla(\Delta Q) \in \mathrm{Im}\nabla$.

   (d) Pour $P \in \mathbb{R}[X]$ notons encore $Q = \nabla P$.
   On a $\displaystyle\sum_{k=0}^{m} P(k) = \sum_{k=0}^{m} (\Delta Q)(k) = \sum_{k=0}^{m} Q(k+1) - Q(k) = Q(m+1) - Q(0)$ par télescopage $= Q(m+1) = \nabla(P)(m+1)$ car $Q(0) = 0$.

4. (a) On a $\Delta(P_n) = \dfrac{1}{n!}\left[(X+1)X(X-1)...(X-n+2) - X(X-1)...(X-n+2)(X-n+1)\right]$
   $= \dfrac{X(X-1)...(X-n+2)}{n!}\left[(X+1) - (X-n+1)\right]$
   $= \dfrac{X(X-1)...(X-n+2)}{(n-1)!} = P_{n-1}(X)$.

   (b) On a $\Delta^2 P_n = P_{n-2}, \Delta^3 P_n = P_{n-3}$. Donc par récurrence immédiate $\Delta^k(P_n) = P_{n-k}$ si $k \le n$.
   Puis $P_0 = 1$ donc $\Delta P_0 = 0$. Ainsi $\Delta^{n+1} P_n = 0$ puis $\Delta^k P_n = 0$ si $k > n$.

   (c) On a $\Delta^k(P_n)(0) = P_{n-k}(0) = 0$ si $k < n$ car 0 est racine des polynômes $P_1, P_2, ...$
   Puis $\Delta^n(P_n)(0) = P_0(0) = 1$ car le polynôme est constant.
   Et enfin $\Delta^k(P_n)(0) = 0$ si $k > n$.

5. (a) La famille de polynôme est libre car échelonnée en degré et $\mathrm{Card}\,\mathcal{B} = n + 1 = \dim\mathbb{R}_n[X]$. Donc $\mathcal{B}$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

(b) Comme $\mathcal{B}$ est une base, on peut écrire $P = \sum_{k=0}^{n} \lambda_k P_k(X)$.

Puis pour $l \in [\![0, n]\!]$, on a $\Delta^l(P)(0) = \sum_{k=0}^{n} \lambda_k \Delta^l(P_k)(0) = \lambda_l$.

Car $\Delta^l(P_k)(0) = 0$ si $k \neq l$ et 1 si $k = l$ d'après la question 4.(c)

Donc $P = \sum_{k=0}^{n} \Delta^k(P)(0) P_k$.

(c) On a $\nabla P = \sum_{k=0}^{n} \Delta^k(P)(0) \nabla P_k$ par linéarité.

Puis $\nabla P_k = P_{k+1}$ car $\Delta P_{k+1} = P_k$ et $P_k(0) = 0$.

Ainsi $\nabla P = \sum_{k=0}^{n} \Delta^k(P)(0) P_{k+1}$

6. (a) On a $P = X^3, \Delta P = (X+1)^3 - X^3 = 3X^2 + 3X + 1, \Delta^2 P = [3(X+1)^2 + 3(X+1) + 1] - [3X^2 + 3X + 1] = 6X + 6$ et $\Delta^3 P = [6(X+1) + 6] - [6X + 6] = 6$.

Donc $\lambda_0 = P(0) = 0, \lambda_1 = \Delta P(0) = 1, \lambda_2 = 6$ et $\lambda_3 = 6$.

(b) D'après la question 6(c) $\nabla(X^3) = \sum_{k=0}^{3} \lambda_k P_{k+1} = P_2(X) + 6P_3(X) + 6P_4(X)$

$$\frac{X(X-1)}{2} + 6\frac{X(X-1)(X-2)}{6} + 6\frac{X(X-1)(X-2)(X-3)}{24}$$
$$= \frac{X(X-1)}{4}[2 + 4(X-2) + (X-2)(X-3)] = \frac{X(X-1)}{4}(X^2 - X)$$
$$= \frac{X^2(X-1)^2}{4}.$$

(c) D'après la question 3(d), on a $\sum_{k=0}^{m} k^3 = \sum_{k=0}^{m} P(k) = \nabla(P)(m+1) = \frac{(m+1)^2 m^2}{4}$.