DM8 - Corrigé

Exercice 1 : 1. On peut écrire le programme :

```
import random as rd
def simul_U():
        d1 = rd.randrange(1,7)
        d2 = rd.randrange(1,7)
        d3 = rd.randrange(1,7)
        return min([d1,d2,d3])
```

2. On pose $\Omega = [\![1,6]\!]^3$ et $V : \Omega \to [\![1,6]\!], (d_1, d_2, d_3) \mapsto \max(d_1, d_2, d_3)$.
   Donc $\mathbb{P}(V \leq k) = \mathbb{P}\{(d_1, d_2, d_3) \text{ tel que } d_i \leq k\} = \dfrac{k^3}{6^3}$.
   Puis $\mathbb{P}(V = k) = \mathbb{P}(V \leq k) - \mathbb{P}(V \leq k-1) = \dfrac{k^3 - (k-1)^3}{216} = \dfrac{3k^2 - 3k + 1}{216}$.
3. On en déduit $\mathbb{E}(V) = \displaystyle\sum_{k=1}^{6} k \frac{3k^2 - 3k + 1}{216} = \frac{1071}{216} = \frac{119}{24}$
   Puis $\mathbb{E}(V^2) = \displaystyle\sum_{k=1}^{6} k^2 \frac{3k^2 - 3k + 1}{216} = \frac{5593}{216}$.
   Puis $\mathbb{V}(V) = \mathbb{E}(V^2) - \mathbb{E}(V)^2 = \dfrac{2261}{1728}$.
4. Par symétrie du problème, on trouve que $7-U$ suit également la loi de V. Donc $\mathbb{E}(7-U) = \dfrac{119}{24}$ et $\mathbb{V}(7-U) = \dfrac{2261}{1768}$.
   Or $\mathbb{E}(7-U) = 7 - \mathbb{E}(U)$ et $\mathbb{V}(7-U) = \mathbb{V}(U)$.
   Donc $\mathbb{E}(U) = \dfrac{49}{24}$ et $\mathbb{V}(U) = \dfrac{2261}{1768}$.
5. On a $U + V + W = D_1 + D_2 + D_3$ avec les résultats des trois dés indépendants.
   Donc $\mathbb{E}(W) = 3\mathbb{E}(D_i) - \mathbb{E}(V) - \mathbb{E}(U) = \dfrac{7}{2}$.
   Puis $\mathbb{P}(W = 1) = \mathbb{P}(U = W = 1) = \mathbb{P}\{(d_1, d_2, d_3) \text{ tel que } d_i = d_j = 1\} = \dfrac{C_3^2.5 + 1}{216} = \dfrac{2}{27}$.
   avec C_3^2 le choix des deux dés $\{i, j\}$ qui font un 1 et 5 le choix du troisième dé distinct.
   On isole le triple $(1, 1, 1)$ qui serait dénombré plusieurs fois.
   Donc la loi de W n'est pas uniforme mais elle est centrée.

Exercice 2 : 1. La loi de X est uniforme donc $\mathbb{P}(X = k) = 1/n$.

2. On a $\mathbb{E}(X) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} k/n = \frac{n+1}{2}$.
   Puis $\mathbb{E}(X^2) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2/n = \frac{(n+1)(2n+1)}{6}$.
   Donc $\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2 = \dfrac{n^2 - 1}{12}$.

3. Dans la recherche de 7 caractères parmi 128 symboles, il y a $n = 128^7 = 2^{49}$ éventualités. On veut trouve une valeur $T \in \mathbb{N}$ tel que $(X \leq T) \geq 95/100$. Or d'après Bienaymé-Tchebychev, on a $\mathbb{P}(|X - \mathbb{E}(X)| \geq \varepsilon) \leq \dfrac{\mathbb{V}(X)}{\varepsilon^2}$. On veut $\dfrac{\mathbb{V}(X)}{\varepsilon^2} = 5/100$ d'où $\varepsilon = \sqrt{100\mathbb{V}(X)/5} = 5677853631117$. Puis $\mathbb{P}(X \geq T) \geq \mathbb{P}(X - \mathbb{E}(X) \geq T - \mathbb{E}(X)) \geq 95/100$ lorsque $T - \mathbb{E}(X) = \varepsilon$. Donc $T = \mathbb{E}(X) + \varepsilon = \dfrac{n+1}{2} + \sqrt{100(n^2-1)/60} = 287152830341773$ convient.
4. L'évènement $(X \geq k)$ signifie que les $(k-1)$ premières clés étaient invalides : $\mathbb{P}(X \geq k) = \left(\dfrac{n-1}{n}\right)^{k-1}$. On en déduit par télescopage : $\mathbb{P}(X = k) = \mathbb{P}(X \geq k) - \mathbb{P}(X \geq k+1) = \left(\dfrac{n-1}{n}\right)^{k-1} - \left(\dfrac{n-1}{n}\right)^{k} = \left(\dfrac{n-1}{n}\right)^{k-1}(1 - \dfrac{n-1}{n}) = \dfrac{(n-1)^{k-1}}{n^k}$. C'est une suite décroissante donc le plus grand terme est le premier. L'évènement le plus probable est $X = 1$.