

Correspondance entre applications linéaires et matrices

Noyau, image et rang d'une matrice

Application linéaire canoniquement associée à une matrice.

Définitions des noyau, image et rang comme ceux de l'application associée.

Théorème du rang. Caractérisation des matrices inversibles.

La notion de rang est cohérente avec celle du pivot de Gauss-Jordan.

Généralités

Matrice d'une application linéaire dans des bases.

L'application $\mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E, F) \rightarrow \mathcal{M}_{\dim(F), \dim(E)}(\mathbb{K})$, $f \mapsto \text{Mat}_{\mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F}(f)$ est un isomorphisme.

Formule entre composition des morphismes et produit des matrices associées.

Une application est un isomorphisme ssi sa matrice est inversible.

Changement de bases

Matrices de passage entre deux bases d'un même espace.

Les matrices de passage sont inversibles et inverses l'une de l'autre.

Formule de changement de bases sur les matrices. Cas des endomorphismes.

Déterminants

Généralités

Définition : Il existe une unique (admis) application unitaire, multilinéaire et alternée.

Exemple du cas $n = 2$ avec l'interprétation d'aire orientée.

Exemple du cas $n = 3$ par $\det(u, v, w) = (u \wedge v).w$ et l'interprétation de volume orienté.

Règle de Sarrus pour le cas $n = 3$.

Propriétés des déterminants

Effets des transvections, dilatations et permutations de colonnes sur le déterminant.

Déterminant d'une matrice triangulaire. Formule d'homogénéité : $\det(\lambda A) = \lambda^n \det(A)$.

Caractérisation des matrices inversibles par le déterminant.

Déterminants d'un produit de matrices et de l'inverse d'une matrice inversible.

Effets des transvections, dilatations et permutations de lignes sur le déterminant.

Déterminant de la transposée d'une matrice.

Développement par rapport à une ligne ou colonne

Mineurs d'ordre $p < n$ d'une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Cofacteurs et Comatrice d'une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Calcul de l'inverse par la comatrice. (Admis)

Formule de développement : $\det(A) = \sum_{i=1}^n a_{i,j_0} \text{Cof}_{i,j_0}(A) = \sum_{j=1}^n a_{i_0,j} \text{Cof}_{i_0,j}(A)$.

Déterminant dans un espace vectoriel de dimension finie

Déterminant d'une famille de vecteurs et caractérisation des bases.

Déterminant d'un endomorphisme et caractérisation des automorphismes.

Déterminant de la composée de deux endomorphismes, de la réciproque d'un automorphisme.