Devoir Surveillé de Mathématiques n$^{\circ}$ 9
le samedi 25 Mai 2024 - durée 4h

Exercice 1 : Factoriser sur $\mathbb{R}[X]$ le polynôme $P(X) = (X+1)^6 - X^6$.

Exercice 2 : Déterminer la suite définie par $u_{n+2} = 2u_{n+1} - 2u_n$ et $(u_0, u_1) = (0, 1)$.

Exercice 3 : Déterminer la fonction solution de $xy'(x) - 2y(x) = \dfrac{x(2x+1)}{(x+1)}$ et $y(1) = \ln(2)$.

Exercice 4 : Déterminer les solution entières $(a, b, c) \in \mathbb{Z}^3$ de $21a + 13b + 14c = 1$.

Exercice 5 : Déterminer le développement limité en $\pi/4$ à l'ordre 2 de $f(x) = \ln(\cos x)$.

Problème I : On considère n urnes numérotées de 1 à n contenant des boules blanches et des boules noires. La première urne contient une proportion p_1 de boules blanches. La deuxième urne et les suivantes contiennent a boules blanches et a boules noires ($a \neq 0$). L'expérience consiste à tirer une boule dans la première urne, à la mettre dans la deuxième urne puis à effectuer un nouveau tirage dans cette deuxième urne et ainsi de suite jusqu'à un tirage dans la n-ème urne. On note X_k la variable aléatoire égale à 1 si la boule tirée au k-ème tirage est blanche et 0 sinon. On pose $p_k = \mathbb{P}(X_k = 1)$ et $q_k = \mathbb{P}(X_k = 0)$.

1. (a) On considère, dans cette question uniquement que $n = 2$ et $p_1 = 1/3$. Ecrire un programme Python qui simule l'expérience renvoyant les valeurs de X_1 et X_2. On pourra utiliser la fonction **random.rand()** qui renvoie un float aléatoire de $]0, 1[$.
   (b) Déterminer les lois de X_1 et X_2 (dans le cas général) ainsi que leur espérance et variance.
   (c) Montrer que X_1 et X_2 ont la même loi ssi $p_1 = \dfrac{1}{2}$.
2. On s'intéresse à la suite $(p_k)_{1 \leq k \leq n}$.
   (a) Montrer que $p_{k+1} = \dfrac{a + p_k}{2a+1}$ pour tout entier k compris entre 1 et $n-1$.
   (b) En déduire p_n en fonction de n.
3. (a) Déterminer un coefficient $\alpha \in \mathbb{R}$ en fonction de a tel que la matrice $M = \left(\begin{smallmatrix} 1-\alpha & \alpha \\ \alpha & 1-\alpha \end{smallmatrix}\right)$ vérifie la relation de récurrence $\left(\begin{smallmatrix} p_{k+1} \\ q_{k+1} \end{smallmatrix}\right) = M \left(\begin{smallmatrix} p_k \\ q_k \end{smallmatrix}\right)$.
   (b) Calculer M^n à l'aide de la formule du binôme de Newton.
   (c) Retrouver l'expression de p_n en fonction de n par une autre méthode.

Problème II : On considère les applications

$$s : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} -y \\ -x \\ z-x-y \end{pmatrix} \text{ et } p : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y \\ y \\ z+x-y \end{pmatrix}.$$

1. On étudie la nature des applications s et p
   (a) Montrer que p est un projecteur et préciser ses espaces propres.
   (b) Montrer que s est une symétrie et préciser ses espaces propres.
2. On étudie l'application $f = s \circ p \circ s$.
   (a) Calculer $p\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $f\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$. Est-ce que s et p commutent ?
   (b) Montrer que f est un projecteur et calculer $\mathrm{Ker} f$.
   (c) En déduire $\mathrm{rg} f$ et montrer que $\mathrm{Im} f = \mathrm{Im} p$.
   (d) Montrer que $2f - id_{\mathbb{R}^3}$ est la symétrie par rapport à $\mathrm{Im} f$ le long de $\mathrm{Ker} f$.
3. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ un polynôme à coefficients réelles.
   (a) Si $P(X) = 2X^2 - X + 1$, déterminer l'application $P(f) = 2f^2 - f + id_{\mathbb{R}^3}$ par sa correspondance sur un vecteur $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.

(b) Etablir $P(f) = [P(1) - P(0)]\, f + P(0) id_{\mathbb{R}^3}$ pour tout $P \in \mathbb{R}[X]$.

(c) Montrer que $P(f)$ est un isomorphisme ssi $P(0) \neq 0$.

(d) En déduire le rang de $P(f)$ en fonction des racines de P.

4. Soit $Q \in \mathbb{R}[X]$ un polynôme à coefficients réelles.

(a) Si $Q(X) = (X+1)^3$, déterminer l'application $Q(s)$ par sa correspondance.

(b) Etablir $Q(s) = \dfrac{Q(1) + Q(-1)}{2} id_{\mathbb{R}^3} + \dfrac{Q(1) - Q(-1)}{2} s$ pour tout $Q \in \mathbb{R}[X]$.

(c) Montrer que $Q(s)$ est l'application nulle ssi 1 et -1 sont des racines de Q.

Problème III : 1. Etude d'une fonction

Soit f définie par $f(x) = \dfrac{\ln(1+2x)}{x} - 1$ lorsque cela est possible.

(a) Déterminer le domaine $I - \{0\}$ de définition de f et préciser sa classe.

(b) Montrer que f se prolonge par continuité en 0 et préciser $f(0)$.

(c) Montrer que f est dérivable en 0 et préciser $f'(0)$.

(d) Montrer qu'il existe un unique $\alpha \in I$ tel que $f(\alpha) = 0$.

2. Etude d'une suite convergente vers α

Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ définie par $u_0 > 0$ et $u_{n+1} = \ln(1 + 2u_n) = g(u_n)$.

(a) Montrer que la suite est bien définie.

(b) On suppose que $u_0 < \alpha$. Montrer que $(u_n)_{n\geq 0}$ est croissante puis convergente.

(c) On suppose que $u_0 > \alpha$. La suite est-elle convergente ?

(d) On suppose que $u_0 = 1$. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, |u_n - \alpha| \leq \left(\dfrac{2}{3}\right)^n$.

(e) Ecrire un programme Python, qui donne une valeur de α à 10^{-4} près en utilisant la question précédente.

3. Etude d'une primitive de f

On pose $F(x) = \displaystyle\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$ pour $x \in I$.

(a) Etudier les variations de F sur I.

(b) Montrer que $\dfrac{F(x)}{x}$ tend vers 1 lorsque x tend vers 0.

(c) Montrer que pour $-1/2 < t \leq -1/4$, on a $\ln(1+2t) \geq \dfrac{-1}{\sqrt{1+2t}}$.

En déduire que $f(t) \leq \dfrac{4}{\sqrt{1+2t}} - 1$.

(d) Montrer que F est minorée au voisinage de $-\dfrac{1}{2}$ puis que F se prolonge par continuité en $-\dfrac{1}{2}$ (On ne recherchera pas à calculer $F(-1/2)$).

(e) La fonction F est-elle dérivable en $-\dfrac{1}{2}$?