Correspondance entre applications linéaires et matrices

Révision semaine 28

Déterminants

Révision semaine 28

Espace préhilbertien réel

Généralités

Produit scalaire et norme associée.

Exemple de référence sur $\mathbb{R}^n$, $C^0([a, b], \mathbb{R})$, $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ et $\mathbb{R}_n[X]$.

Inégalité de Cauchy-Swartz. Inégalité triangulaire.

Identités remarquables, du parallélogramme et de polarisation.

Orthogonalité

Les familles orthogonales sont libres.

Les sous-espaces F et $F^\perp$ sont en somme directe orthogonale.

Calculs des coordonnées, de la norme et du produit scalaire à l'aide d'une base orthonormée.

Procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt.

Projecteur orthogonal

Si F est de dimension finie alors $E = F \oplus F^\perp$ et $(F^\perp)^\perp = F$.

Formule $p_F(x) = \sum_{i=1}^p \langle x | b_i \rangle b_i$ avec $(b_1, \dots, b_p)$ une base orthonormée d'un sous-espace F .

Distance d'un vecteur à un sous-espace. Inégalité de Bessel.

Liste de Questions de cours :

- Démontrer l'inégalité de Cauchy-Schwartz.
- Démontrer que $E = F \oplus F^\perp$ si F est de dimension finie.
- Montrer que $\langle A|B \rangle = \text{Tr}(A^T B)$ est un produit scalaire sur $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$.
- Montrer que $\langle P|Q \rangle = \int_a^b P(t)Q(t) dt$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}_n[X]$.
- Appliquer l'algorithme de Gram-Schmidt sur $F = \text{Vect}(e_1, \dots, e_p)$ un sous-espace de $\mathbb{R}^n$ avec $2 \leq p < n \leq 4$.