DS9 - Corrigé

Exercice 1 : On a $(X+1)^6 - X^6 = (X^6 + 6X^5 + ... + 1) - X^6 = 6X^5 + ... + 1$ d'après la FBN.

Soit $z \in \mathbb{C} - \{0\}$ une racine de P. On a bien $P(0) = 1 \neq 0$.

On a $P(z) = 0$ ssi $\left(\dfrac{z+1}{z}\right)^6 = 1$

ssi $\exists \omega \in \mathbb{U}_6, \dfrac{z+1}{z} = \omega$

ssi $\exists \omega \in \mathbb{U}_6, z = \dfrac{1}{\omega - 1}$ donc $\omega \neq 1$

ssi $\exists k \in [\![1, 5]\!], z = \dfrac{1}{e^{2ik\pi/6} - 1} = \dfrac{e^{-ik\pi/6}}{2i\sin(k\pi/6)}$.

Donc on a trouvé 5 racines d'un polynômes de degré 5. Le polynôme est scindé à racines simples.

$P(X) = 6\left(X - \dfrac{e^{-i\pi/6}}{2i\sin(\pi/6)}\right)\left(X - \dfrac{e^{-i\pi/3}}{2i\sin(\pi/3)}\right)\left(X - \dfrac{e^{-i\pi/2}}{2i\sin(\pi/2)}\right)\left(X - \dfrac{e^{-2i\pi/3}}{2i\sin(2\pi/3)}\right)\left(X - \dfrac{e^{-5i\pi/6}}{2i\sin(5\pi/6)}\right)$

$= 6(X - e^{-i\pi/6 - i\pi/2})(X - e^{-i\pi/3 - i\pi/2}/\sqrt{3})(X + 1/2)(X - e^{i\pi/3 + i\pi/2}/\sqrt{3})(X - e^{i\pi/6 + i\pi/2})$

$= 6(X + 1/2)(X^2 - 2\cos(2\pi/3)X + 1)(X^2 - 2\cos(5\pi/6)/\sqrt{3}X + 1/3)$

$= 6(X + 1/2)(X^2 + X + 1)(X^2 + X + 1/3)$

Exercice 2 : Le polynôme caractéristique de la SRL2 est
$X^2 - 2X + 2 = (X-1)^2 + 1^2 = (X - 1 - i)(X - 1 + i)$.

Donc les racines sont $1 \pm i = \sqrt{2}e^{\pm i\pi/4}$.

Il existe des réels $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ à déterminer tels que $u_n = \sqrt{2}^n[\lambda_1 \cos(n\pi/4) + \lambda_2 \sin(n\pi/4)]$.

Les conditions initiales donnent $\lambda_1 = 0$ et $\sqrt{2}[\lambda_1\sqrt{2}/2 + \lambda_2\sqrt{2}/2] = 1$. Donc $\lambda_2 = 1$.

Ainsi $u_n = 2^{n/2}\sin(n\pi/4)$.

Exercice 3 : Il s'agit d'une EDL d'ordre 1 à coefficients non constant $a(x) = \dfrac{2}{x}$ et avec second membre $b(x) = \dfrac{2x+1}{x+1}$. On peut résoudre l'équation sur $I =]0, +\infty[$ (problème en 0 et -1)

Une primitive de $a(x) = \dfrac{2}{x}$ est $A(x) = 2\ln(x)$. Donc les solutions homogènes s'écrivent $y_h(x) = \lambda e^{A(x)} = \lambda x^2$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$.

Puis, avec la méthode de Lagrange, on recherche $y_p(x) = k(x)x^2$ avec k une fonction de classe C^1. On obtient $k'(x)x^2 + 2xk(x) = 2k(x)x + \dfrac{2x+1}{x+1}$

puis $k'(x) = \dfrac{2x+1}{x^2(x+1)} = \dfrac{x + (x+1)}{x^2(x+1)} = \dfrac{1}{x(x+1)} + \dfrac{1}{x^2} = \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x+1} + \dfrac{1}{x^2}$.

On en déduit que $k(x) = \ln(x) - \ln(x+1) - \dfrac{1}{x}$. Puis $y_p(x) = x^2\ln(x) - x^2\ln(x+1) - x$.

Ainsi $y(x) = \lambda x^2 - x + x^2\ln(x) - x^2\ln(x+1)$.

La condition $y(1) = \ln(2)$ s'écrit $\lambda - 1 + 0 - \ln(2) = \ln(2)$ donc $\lambda = 2\ln(2) + 1$.

Exercice 4 : On écrit $21a + 13b + 14c = 7(3a + 2c) + 13b = 7n + 13b$.

L'équation $7n + 13b = 1$ admet $(2, -1)$ comme solution évidente. Puis le Lemme de Gauss montre que $n = 2 + 13k_1$ et $b = -1 - 7k_1$ avec $k_1 \in \mathbb{Z}$.

L'équation $3a + 2c = n$ admet $(n, -n)$ comme solution évidente et $(2, -3)\mathbb{Z}$ comme solution homogène. Donc $a = n + 2k_2 = 2 + 13k_1 + 2k_2$ et $c = -n - 3k_2 = -2 - 13k_1 - 3k_2$.

Ainsi $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} + k_1 \begin{pmatrix} 13 \\ -7 \\ -13 \end{pmatrix} + k_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}$ pour $k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$.

Exercice 5 : On note $x = \pi/4 + h$ avec $h \to 0$.

On a $\ln(\cos x) = \ln(\cos(\pi/4 + h)) = \ln[\sqrt{2}/2 \cos(h) - \sqrt{2}/2 \sin(h)]$
$=_{h\to 0} \ln(\sqrt{2}/2) + \ln[1 - h^2/2 + o(h^2) - h + o(h^2)]$
$=_{h\to 0} -\dfrac{\ln(2)}{2} + (-h - h^2/2) - (-h - h^2/2)^2/2 + o(h^2)$
$=_{h\to 0} -\dfrac{\ln(2)}{2} - h - h^2 + o(h^2)$.

Problème I : 1. (a)

```
def simul(a):
    X1, X2 = 0, 0
    p1, p2 = 1/3, a/(2*a+1)
    if random.rand()<1/3:
        X1 = 1
        p2 = (a+1)/(2*a+1)
    if random.rand()<p2:
        X2 = 1
    return X1, X2
```

(b) Les variables X_k n'ont que deux aléas. Ce sont des variables de Bernoulli.
Donc $X_k \sim \mathcal{B}(p_k)$ puis $\mathbb{E}(X_k) = p_k$ et $\mathbb{V}(X_k) = p_k(1 - p_k)$.

(c) Les variables X_1 et X_2 suivent la même loi ssi $p_1 = p_2$.
Or d'après la FTP sur le SCEI $\{(X_1 = 0), (X_1 = 1)\}$
$p_2 = \mathbb{P}(X_2 = 1) = \mathbb{P}(X_1 = 0)\mathbb{P}_{X_1=0}(X_2 = 1) + \mathbb{P}(X_1 = 1)\mathbb{P}_{X_1=1}(X_2 = 1)$
$= (1 - p_1)\dfrac{a}{2a+1} + p_1\dfrac{a+1}{2a+1}$.
Puis $p_2 = p_1 = \dfrac{a + p_1}{2a+1}$ ssi $p_1 = 1/2$.

2. (a) En appliquant la formule de probabilité totale, on obtient :
$p_{k+1} = p_k\dfrac{a+1}{2a+1} + (1 - p_k)\dfrac{a}{2a+1} = \dfrac{a + p_k}{2a+1}$.

(b) On reconnait une suite arthimético-géométrique de point fixe $l = 1/2$.
Donc $p_k = (p_1 - l)^{k-1} + l = (p - 1/2)^{k-1} + 1/2$.

3. (a) On a $p_{k+1} = \dfrac{a+1}{2a+1}p_k + \dfrac{a}{2a+1}q_k$ et $q_{k+1} = \dfrac{a}{2a+1}p_k + \dfrac{a+1}{2a+1}q_k$.
Donc la matrice $M = \begin{pmatrix} \dfrac{a+1}{2a+1} & \dfrac{a}{2a+1} \\ \dfrac{a}{2a+1} & \dfrac{a+1}{2a+1} \end{pmatrix}$ convient avec $\alpha = \dfrac{a}{2a+1}$.

(b) On peut écrire $M = \dfrac{1}{2a+1}(I_2 + aJ)$ avec $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.
On a par récurrence $J^0 = I_2$ et pour $n \geq 1, J^n = 2^{n-1}J$.

Puis I_2 et J commutent et $(I_2+aJ)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(aJ)^k$

$= I_2 + \sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}2^{k-1}a^kJ = I_2 + \frac{1}{2}[(1+2a)^n - 1]J.$

Donc $M^n = \frac{1}{2(2a+1)^n}\begin{pmatrix}(2a+1)^n+1 & (2a+1)^n-1\\ (2a+1)^n-1 & (2a+1)^n+1\end{pmatrix}.$

(c) On obtient par récurrence $\binom{p_n}{q_n} = M^{n-1}\binom{p_1}{q_1}$.

Donc $p_n = \frac{1}{2(2a+1)^{n-1}}\big(p((2a+1)^{n-1}+1)+(1-p)((2a+1)^{n-1}-1)\big)$

$= \frac{1}{2} + \frac{(p-1/2)}{(2a+1)^{n-1}}.$

Problème II : 1. (a) p est l'application linéaire canoniquement associée à $A = \begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 1 & -1 & 1\end{pmatrix}$.

De plus $A^2 = A$ par le calcul matriciel. Donc p est un projecteur.

On calcul le noyau $\mathrm{Ker}p = \mathrm{Ker}A$.

On a $A = \begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 1 & -1 & 1\end{pmatrix} \sim_L \begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$.

Donc $\mathrm{Ker}p = \mathrm{Vect}\left(\begin{smallmatrix}1\\0\\-1\end{smallmatrix}\right)$.

Puis $\mathrm{Im}p = \mathrm{Im}A = \mathrm{Vect}\left[\left(\begin{smallmatrix}0\\0\\1\end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix}1\\1\\-1\end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix}0\\0\\1\end{smallmatrix}\right)\right] = \mathrm{Vect}\left[\left(\begin{smallmatrix}0\\0\\1\end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix}1\\1\\0\end{smallmatrix}\right)\right]$.

(b) s est l'application linéaire canoniquement associée à $B = \begin{pmatrix}0 & -1 & 0\\ -1 & 0 & 0\\ -1 & -1 & 1\end{pmatrix}$. De plus $B^2 = B$ par le calcul matriciel. Donc s est une symétrie.

On calcul $\mathrm{Ker}(s - id_{\mathbb{R}^3}) = \mathrm{Ker}(B - I_3)$.

$B - I_3 = \begin{pmatrix}-1 & -1 & 0\\ -1 & -1 & 0\\ -1 & -1 & 0\end{pmatrix} \sim_L \begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$.

On trouve $\mathrm{Ker}(s - id_{\mathbb{R}^3}) = \mathrm{Vect}\left[\left(\begin{smallmatrix}-1\\1\\0\end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix}0\\0\\1\end{smallmatrix}\right)\right]$.

On calcul $\mathrm{Ker}(s + id_{\mathbb{R}^3}) = \mathrm{Ker}(B + I_3)$.

$B + I_3 = \begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\ -1 & 1 & 0\\ -1 & -1 & 2\end{pmatrix} \sim_L \begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 1\end{pmatrix}$.

On trouve $\mathrm{Ker}(s + id_{\mathbb{R}^3}) = \mathrm{Vect}\left[\left(\begin{smallmatrix}1\\1\\1\end{smallmatrix}\right)\right]$.

2. (a) On a $p\left(\begin{smallmatrix}1\\2\\3\end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix}2\\2\\2\end{smallmatrix}\right)$ et $f\left(\begin{smallmatrix}1\\2\\3\end{smallmatrix}\right) = s\circ p\left(\begin{smallmatrix}-2\\-1\\0\end{smallmatrix}\right) = s\left(\begin{smallmatrix}-1\\-1\\-1\end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix}1\\1\\1\end{smallmatrix}\right)$.

Si s et p commutaient alors $s\circ p\circ s = s^2\circ p = p$ absurde par les correspondances calculées.

(b) On a $f^2 = (s\circ p\circ s)\circ(s\circ p\circ s) = s\circ p\circ s^2\circ p\circ s$ car associatif,
$= s\circ p^2\circ s = s\circ p\circ p$ car $s^2 = id$ puis $p^2 = p$.

Donc $f^2 = f$ et f est un projecteur.
On a $f(u) = 0 \Leftrightarrow s(p(s(u))) = 0 \Leftrightarrow p(s(u)) = 0$ car s est injective,
$\Leftrightarrow s(u) \in \mathrm{Ker}p \Leftrightarrow s(u) = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ d'après 1.a.
$\Leftrightarrow u = s^2(u) = \lambda s \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$ car $s^2 = id$.
Donc $\mathrm{Ker}f = \mathrm{Vect} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

(c) D'après le Théorème du rang, $\mathrm{rg}f = \dim\mathbb{R}^3 - \dim\mathrm{Ker}f = 3 - 1 = 2$. Puis $Imp = \mathrm{Vect}\left[\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right]$
et $f\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = ... = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{Im}f$ et $f\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = ... = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \in \mathrm{Im}f$.
Donc $\mathrm{Im}p \subset \mathrm{Im}f$ et ils ont la même dimension. D'où $\mathrm{Im}p = \mathrm{Im}f$.

(d) D'après la formule du binôme avec id et f qui commutent, on a $(2f - id)^2 = 4f^2 - 4f + id = id$ car $f^2 = f$.
Pour $u \in \mathrm{Im}f$, $(2f - id)(u) = 2f(u) - u = 2u - u = u$ donc ces vecteurs sont invariants.
Pour $v \in$
$Kerf$, $(2f - id)(v) = 2f(v) - v = -v$ donc ces vecteurs sont contravariants.

3. (a) On a $2f^2 - f + id = f + id$ car $f^2 = f$. Puis $f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ x \\ -2x-2y+z \end{pmatrix}$ donc $P(f)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x \\ x+y \\ -2x-2y+2z \end{pmatrix}$.

(b) On note $P(X) = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$. On a $P(f) = \sum_{k=0}^{n} a_k f^k = a_0 id + \sum_{k=1}^{n} a_k f$ car $f^k = f$ pour tout $k \geq 1$. Puis $P(0) = a_0$ et $P(1) - P(0) = \sum_{k=0}^{n} a_k - a_0 = \sum_{k=1}^{n} a_k$ permet d'obtenir la formule de l'énoncé.

(c) On sait que $\mathbb{R}^3 = \mathrm{Ker}f \oplus \mathrm{Im}f$.
Pour $u_0 \in \mathrm{Ker}f, P(f)(u_0) = 0 + P(0)u_0$ et pour $u_1 \in \mathrm{Im}f$, $P(f)(u_1) = (P(1) - P(0))u_1 + P(0)u_1 = P(1)u_1$.
Donc $P(f)(u_0 + u_1) = P(0)u_0 + P(1)u_1 = 0 \Leftrightarrow P(0)u_0 = P(1)u_1 = 0$.
Donc si $P(1) = 0$ et $P(0) = 0, \mathrm{Ker}P(f) = \mathbb{R}^3$.
Si $P(1) = 0$ et $P(0) \neq 0, \mathrm{Ker}P(f) = \mathrm{Im}f$.
Si $P(1) \neq 0$ et $P(0) = 0, \mathrm{Ker}P(f) = \mathrm{Ker}f$.
Si $P(1) \neq 0$ et $P(0) \neq 0, \mathrm{Ker}P(f) = \{0\}$.
Donc $P(f)$ est un automorphisme ssi $\ker P(f) = \{0\}$ ssi $P(1) \neq 0$ et $P(0) \neq 0$.

(d) On connait la dimension du noyau d'après ce qui précède. Par la théorème du rang, on déduit
$\mathrm{rg}P(f) = 3 - \dim\mathrm{Ker}f = 0$ si $P(1) = P(0) = 0$,
$\mathrm{rg}P(f) = 1$ si $P(0) = 0$ et $P(1) \neq 0$,
$\mathrm{rg}P(f) = 2$ si $P(1) = 0$ et $P(0) \neq 0$,
$\mathrm{etrg}P(f) = 3$ si $P(0) \neq 0$ et $P(1) \neq 0$.

4. (a) On a s et id commutent donc d'après la formule du binôme de Newton
$(s + id)^3 = s^3 + 3s^2 + 3s + id = 4(s + id)$ car $s^2 = id$.

Donc $Q(s)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 4\begin{pmatrix} x-y \\ -x+y \\ -x-y+2z \end{pmatrix}$.

(b) On écrit $Q(X) = \sum_{k=0}^{n} b_k X^k$. On a $Q(1) = \sum_{k=0}^{n} b_k$ et $Q(-1) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k b_k$.

$$\frac{Q(1)+Q(-1)}{2} = \sum_{\substack{k=0 \\ k \text{ pair}}}^{n} b_k \text{ et } \frac{Q(1)-Q(-1)}{2} = \sum_{\substack{k=0 \\ k \text{ impair}}}^{n} b_k.$$

Puis $Q(s) = \sum_{k=0}^{n} b_k s^k = \sum_{k \text{ pair}} b_k id + \sum_{k \text{ impair}} b_k s = \frac{Q(1)+Q(-1)}{2} id_{\mathbb{R}^3} + \frac{Q(1)-Q(-1)}{2} s.$

(c) La réciproque est triviale d'après la formule précédente.
On suppose que $Q(s) = 0$. Alors pour $u \in \operatorname{Ker}(s - id)$ non nul, on a $s(u) = u$. Puis $0 = Q(s)(u) = \frac{Q(1)+Q(-1)}{2} u + \frac{Q(1)-Q(-1)}{2} u = Q(1)u$. Donc $Q(1) = 0$.
De même, pour $v \in \operatorname{Ker}(s+id)$ non nul, on a $s(v) = -v$. Donc $0 = Q(s)(v) = Q(-1)v$. Puis $Q(-1) = 0$.

Problème III : 1. Étude d'une fonction

(a) La fonction est $\mathbb{C}^\infty$ pour $x \neq 0$ lorsque $2x + 1 > 0$. Donc $I =]-1/2, +\infty[$.

(b) On a $f(x) =_{x \to 0} \frac{2x - (2x)^2/2 + o(x^2)}{x} - 1 = 1 - 2x + o(x)$.
Donc $\lim_{x \to 0} f(x) = 1 = f(0)$ et f est continue en 0.

(c) La fonction admet un DL d'ordre 1 en 0 donc f est dérivable et $f'(0) = -2$.

(d) On a $f'(x) = \frac{h(x)}{x^2}$ avec $h(x) = \frac{x}{1+2x} - \ln(1+2x)$.
Puis h est dérivable et $h'(x) = \frac{(1+2x) - 2x}{(1+2x)^2} - \frac{1}{1+2x} = \frac{-2x}{(1+2x)^2}$.
Donc h admet un maximum en 0 et $h(x) \leq h(0) = 0$ ainsi $h(x) \leq 0$.
Donc $f'(x) \leq 0$. La fonction f est décroissante (strictement).
Puis $f(0) = 1$ et $\lim_{\infty} f = -1$ donc d'après le théorème de la bijection continue, il existe un unique α tel que $f(\alpha) = 0$.
On obtient une approximation de α par dichotomie : $f(1) = \ln(3) - 1 > 0$ et $f(3/2) = 2\ln(4)/3 - 1 < 0$. Donc $1 < \alpha < 3/2$.

2. Etude d'une suite convergeant vers α

(a) On montre par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n > 0$. En effet si $u_n > 0$ alors $u_{n+1} = \ln(1 + 2u_n) > \ln(1) = 0$.

(b) On résout $g(l) = l$. On obtient $l = 0$ ou $f(l) = 0$. Donc $l \in \{0, \alpha\}$. sont les deux points fixes.
La fonction g est croissante sur $\mathbb{R}_+$, $g(0) = 0$ et $g(\alpha) = \alpha$. Donc $g([0, \alpha]) = [0, \alpha]$ est un intervalle stable. Ainsi par récurrence immédiate $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \in [0, \alpha]$.

La fonction $f(x) = g(x)/x - 1$ est positive sur $[0, \alpha[$ donc $f(u_n) = u_{n+1}/u_n - 1 > 0$.
La suite $(u_n)_{n\geq 0}$ est croissante et majorée. Elle admet une limite par le théorème de convergence monotone et tend donc vers α.

(c) On a également $g(]\alpha, +\infty[) =]\alpha, +\infty[$ donc la suite est minorée par α. Puis de même $u_{n+1}/u_n < 1$ car $f(u_n) < 0$.
La suite est décroissante et minorée, donc converge vers α.

(d) On applique le théorème des accroissements finis.
On a $|u_{n+1} - \alpha| = |g(u_n) - g(\alpha)| \leq \left(\sup_{[1,\alpha]} g'\right) |u_n - \alpha| \leq \dfrac{2}{3}|u_n - \alpha|$ car $\sup_{[1,\alpha]} g' = g'(1) = 2/3$.
Ainsi on obtient par récurrence, $|u_n - \alpha| \leq \left(\dfrac{2}{3}\right)^n |u_0 - \alpha|$ et $|u_0 - \alpha| \leq 1/2$.

(e)
```
def alpha(epsilon = 1e-4):
    x0=1
    x1=np.log(3)
    while abs(x1-x0)>epsilon:
        x0, x1 = x1, np.log(1+2*x1)
    return x1
```

3. Etude d'une primitive de f

(a) Une primitive est dérivable et $F' = f$. Donc F est strictement croissante sur $]-1/2, \alpha[$ et strictement décroissante sur $]\alpha, +\infty[$.

(b) On a $F(0) = 0$ et F est dérivable en 0.
Donc $\dfrac{F(x)}{x} = \dfrac{F(x) - F(0)}{x - 0} \to_{x\to 0} F'(0) = f(0) = 1$ par définition.

(c) On note $\varphi(t) = \ln(1 + 2t) + \dfrac{1}{\sqrt{1+2t}}$.
On obtient en dérivant $\varphi'(t) = \dfrac{2}{1+2t} - \dfrac{1}{2\sqrt{2t+1}^3} = (2t+1)^{-3/2}\left(2(1 + 2t) - 1/2\right) = (2t + 1)^{-3/2}(4t + 3/2) \leq 0$ pour $t \in]-1/2, -1/4[$.
D'autre part $\varphi(-1/4) = \ln(1/2) + \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}/2 - \ln(2) \approx (1.414/2 - 0.69) > 0$. Donc $\varphi(t) > \varphi(-1/4) > 0$ dans le domaine considéré.
Donc $f(t) = \dfrac{1}{t}\ln(1 + 2t) - 1 \leq (-4)\dfrac{-1}{\sqrt{1+2t}} - 1 = \dfrac{4}{\sqrt{1+2t}} - 1$.

(d) On a $F(x) - F(-1/4) = \displaystyle\int_{-1/4}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t = -\int_{x}^{-1/4} f(t)\,\mathrm{d}t \geq -\int_{x}^{-1/4} \frac{4}{\sqrt{1+2t}} - 1\,\mathrm{d}t = -[4\sqrt{(1 + 2t)} - t]_x^{-1/4} = 4\sqrt{1 + 2x} - x - 2\sqrt{2} - 1/4 \geq -2\sqrt{2}$. Donc F est bornée au voisinage de $(-1/2)$.
La fonction F est strictement monotone donc d'après le thm de convergence monotone elle admet une limite à droite (et à gauche en tout point).
Or la fonction est bornée donc la limite est finie.

(e) La limite de f en $-1/2$ est $+\infty$. Donc la primitive F n'est pas dérivable en $-1/2$.