DM9 : Algèbre linéaire
à rendre le Lundi 10 Juin 2024.

Exercice 1 : On considère la matrice à coefficients réels $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & 2 \\ 5 & -3 & -4 \end{pmatrix}$. On note $\mathcal{B}_0$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et f l'endomorphisme canoniquement associé A.

1. Déterminer une base du noyau de f et préciser sa dimension.
2. En déduire le rang et le déterminant de la matrice A.
3. Calculer A^2 et A^3. Observer une relation liant A et A^3.
4. Dans la suite, on considère $\lambda \in \mathbb{R}$ et $X \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ tel que $f(X) = \lambda X$. Montrer que pour tout entier $n \geq 0$, $A^n X = \lambda^n X$.
5. En déduire que $\lambda^3 = \lambda$. Quelles sont les valeurs possibles de λ ?
6. Calculer les espaces propres $E_\lambda = \{X \in \mathbb{R}^3 \text{ tel que } f(X) = \lambda X\}$ associés à chacune de ces trois valeurs propres.
7. En déduire une base de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle la matrice est diagonale.
8. Ecrire les matrices de passages puis une expression de $(I_3 - A)^n$ pour $n \geq 0$.

Exercice 2 : Calculer les déterminants suivants sous forme factorisée :

$$\begin{vmatrix} 1-x & 1 & 2 \\ 1 & 2-x & 3 \\ 1 & 2 & 3-x \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} a+b & b+c & c+a \\ a^2+b^2 & b^2+c^2 & c^2+a^2 \\ a^3+b^3 & b^3+c^3 & c^3+a^3 \end{vmatrix} \text{ et } \begin{vmatrix} a+b & ab & a^2+b^2 \\ b+c & bc & b^2+c^2 \\ c+a & ca & c^2+a^2 \end{vmatrix}$$