DM9 : Algèbre linéaire
à rendre le Lundi 10 Juin 2024.

Exercice 1 : 1. On résout par opération sur les lignes le système homogène associé à :

$$A=\begin{pmatrix}3&-2&-2\\-2&1&2\\5&-3&-4\end{pmatrix}\sim_L\begin{pmatrix}3&-2&-2\\1&-1&0\\-1&1&0\end{pmatrix}$$

Donc $x=y=2z$ et $\mathrm{Ker}(f)=\mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\begin{pmatrix}2\\2\\1\end{pmatrix}$ est de dimension 1.

2. Par la formule du rang, on a : $rg(A)=rg(f)=\dim(\mathbb{R}^3)-\dim(\mathrm{Ker}f)=3-1=2$. Puis A n'est pas inversible donc $\det(A)=0$.

3. Par le calcul, on trouve : $A^2=\begin{pmatrix}3&-2&-2\\2&-1&-2\\1&-1&0\end{pmatrix}$ et $A^3=\begin{pmatrix}3&-2&-2\\-2&1&2\\5&-3&-4\end{pmatrix}=A$.

4. On démontre par récurrence la proposition.
Initialisation : Pour $n=0$, on a $A^0X=I_3X=X$ et $\lambda^0X=X$.
Hérédité : Soit $n\in\mathbb{N}$ tel que $A^nX=\lambda^nX$.
On a $A^{n+1}X=AA^n(X)=A(\lambda^nX)=\lambda^nAX=\lambda^{n+1}X$.

5. La relation $A^3=A$ devient $\lambda^3X=\lambda X$. Or $X\neq 0$ donc $\lambda^3=\lambda$ puis $\lambda\in\{0,1,-1\}$.

6. On a $E_0(f)=\mathrm{Ker}(A)=\mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\begin{pmatrix}2\\2\\1\end{pmatrix}$.
Puis $X\in E_1(f)$ ssi $AX=X$ ssi $(A-I_3)X=0$.

$$A-I_3=\begin{pmatrix}2&-2&-2\\-2&0&2\\5&-3&-5\end{pmatrix}\sim_L\begin{pmatrix}0&-2&0\\-2&0&2\\0&-3&0\end{pmatrix}.\text{ Donc }\begin{cases}x&=z\\y&=0\\z&\in\mathbb{R}\end{cases}.$$

Puis $E_1(f)=\mathrm{Vect}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$.

De même $E_{-1}(f)=\mathrm{Ker}(A+I_3)=\mathrm{Vect}\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}$ car :

$$A+I_3=\begin{pmatrix}4&-2&-2\\-2&2&2\\5&-3&-3\end{pmatrix}\sim_L\begin{pmatrix}2&0&0\\0&1&1\\0&1&1\end{pmatrix}.\text{ Donc }\begin{cases}x&=0\\y&=-z\\z&\in\mathbb{R}\end{cases}$$

7. Posons $v_1=\begin{pmatrix}2\\2\\1\end{pmatrix}, v_2=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$ et $v_3=\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}$. La famille forme une base $\mathcal{B}$ et la matrice est alors : $D=diag(0,1,-1)$ car $f(v_1)=0_E$, $f(v_2)=v_2$ et $f(v_3)=-v_3$.

8. Les matrices de passages sont : $P=Mat_{\mathcal{B},\mathcal{B}_0}(id_E)=\begin{pmatrix}2&1&0\\2&0&1\\1&1&-1\end{pmatrix}$ et $Mat_{\mathcal{B}_0,\mathcal{B}}(id_E)=$

$P^{-1}=\begin{pmatrix}-1&1&1\\3&-2&-2\\2&-1&-2\end{pmatrix}$. Ceci permet d'écrire $A=PDP^{-1}$,

donc $I_3-A=P(I_3-D)P^{-1}=Pdiag(1,0,2)P^{-1}$ et pour $n\geq 1, (I_3-A)^n=P^{-1}diag(1,0,2^n)P$.

D'où après calcul : $(I_3-A)^n=\begin{pmatrix}-2&2&2\\2^{n+1}-2&-2^n+2&-2^{n+1}+2\\-2^{n+1}-1&-2^n+1&2^{n+1}+1\end{pmatrix}$.

Exercice 2 : 1. $\begin{vmatrix}1-x & 1 & 2\\ 1 & 2-x & 3\\ 1 & 2 & 3-x\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}1-x & 1 & x\\ 1 & 2-x & x\\ 1 & 2 & -x\end{vmatrix}$ par $C_3 \leftarrow C_3 - C_2 - C_1$

$= x\begin{vmatrix}1-x & 1 & 1\\ 1 & 2-x & 1\\ 1 & 2 & -1\end{vmatrix} = x\begin{vmatrix}2-x & 3 & 1\\ 2 & 4-x & 1\\ 0 & 0 & -1\end{vmatrix}$

$= -x\begin{vmatrix}2-x & 3\\ 2 & 4-x\end{vmatrix} = x[(x-2)(x-4)-6] = x(x^2-6x+2) = x(x-3+\sqrt{7})(x-3-\sqrt{7})$.

2. La forme du déterminant rappelle le Vandermonde, on a :
$\begin{pmatrix}a+b & b+c & c+a\\ a^2+b^2 & b^2+c^2 & c^2+a^2\\ a^3+b^3 & b^3+c^3 & c^3+a^3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a & b & c\\ a^2 & b^2 & c^2\\ a^3 & b^3 & c^3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix}$.
On sait que le déterminant est alors le produit des déterminant.
Par la règle de Sarrus : $\begin{vmatrix}1 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 1\end{vmatrix} = 2$.
Par le Vandermonde : $\begin{vmatrix}a & b & c\\ a^2 & b^2 & c^2\\ a^3 & b^3 & c^3\end{vmatrix} = abc(c-a)(c-b)(b-a)$.
Donc le déterminant recherché est : $2abc(c-a)(c-b)(b-a)$.

3. Par opérations élémentaires, on a : $\begin{vmatrix}a+b & ab & a^2+b^2\\ b+c & bc & b^2+c^2\\ c+a & ca & c^2+a^2\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}a+b & ab & a^2+b^2\\ c-a & b(c-a) & c^2-a^2\\ c-b & a(c-b) & c^2-b^2\end{vmatrix}$

$= (c-a)(c-b)\begin{vmatrix}a+b & ab & a^2+b^2\\ 1 & b & a+c\\ 1 & a & b+c\end{vmatrix} = (c-a)(c-b)\begin{vmatrix}a+b & ab & a^2+b^2\\ 1 & b & a+c\\ 0 & a-b & b-a\end{vmatrix}$

$= (c-a)(c-b)(a-b)\begin{vmatrix}a+b & ab & a^2+b^2+ab\\ 1 & b & a+c+b\\ 0 & 1 & 0\end{vmatrix} = -(c-a)(c-b)(a-b)\begin{vmatrix}a+b & a^2+b^2+ab\\ 1 & a+c+b\end{vmatrix}$

$= (c-a)(c-b)(b-a)(ab+bc+ca)$.