

DM10 : Intégrale et Série

Devoir libre avant le 21 Juin 2024

Exercice 1 : On recherche à calculer la limite de la suite $u_n = a_n b_n$ avec :

$$a_n = \sum_{k=1}^n \sin\left(\frac{\pi k}{2n}\right) \text{ et } b_n = \int_0^1 t^{2n} \sin\left(\frac{\pi t}{2}\right) dt.$$

1. Déterminer un équivalent de la suite $(a_n)_{n \geq 1}$.
2. A l'aide d'un encadrement, montrer que $I_n = \int_0^1 t^{2n+1} \cos \frac{\pi t}{2} dt$ tend vers 0.
3. En déduire que b_n est équivalent à $\frac{1}{2n}$.
4. En déduire la limite, si elle existe, de la suite $(u_n)_{n \geq 0}$.

Exercice 2 : 1. Prouver que $\sqrt{n^2 + n + 1} =_{n \rightarrow +\infty} n + a + \frac{b}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$
où l'on précisera les constantes $a, b \in \mathbb{R}$.

2. Démontrer la convergence de la série $\sum \frac{(-1)^n}{n}$.
3. En déduire la convergence de la série $\sum \cos(\pi\sqrt{n^2 + n + 1})$.
4. La série est-elle absolument convergente ?