

# DM10 : Intégrale et Série

## Devoir libre avant le 21 Juin 2024

**Exercice 1 :** On recherche à calculer la limite de la suite  $u_n = a_n b_n$  avec :

$$a_n = \sum_{k=1}^n \sin\left(\frac{\pi k}{2n}\right) \text{ et } b_n = \int_0^1 t^{2n} \sin\left(\frac{\pi t}{2}\right) dt.$$

1. Déterminer un équivalent de la suite  $(a_n)_{n \geq 1}$ .
2. A l'aide d'un encadrement, montrer que  $I_n = \int_0^1 t^{2n+1} \cos \frac{\pi t}{2} dt$  tend vers 0.
3. En déduire que  $b_n$  est équivalent à  $\frac{1}{2n}$ .
4. En déduire la limite, si elle existe, de la suite  $(u_n)_{n \geq 0}$ .

**Exercice 2 :** 1. Prouver que  $\sqrt{n^2 + n + 1} =_{n \rightarrow +\infty} n + a + \frac{b}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$   
où l'on précisera les constantes  $a, b \in \mathbb{R}$ .

2. Démontrer la convergence de la série  $\sum \frac{(-1)^n}{n}$ .
3. En déduire la convergence de la série  $\sum \cos(\pi\sqrt{n^2 + n + 1})$ .
4. La série est-elle absolument convergente ?