DM10 - Corrige

Exercice 1 : 1. Par les sommes de Riemann, on a : $\frac{a_n}{n} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \sin\left(\frac{\pi k}{2n}\right) \to \int_0^1 \sin\left(\frac{\pi t}{2}\right) \mathrm{d}t$
Cette intégrale vaut $\left[\frac{-2}{\pi}\cos\left(\frac{\pi t}{2}\right)\right]_0^1 = \frac{2}{\pi}$. Donc $a_n \sim 2n/\pi$.

2. Par encadrement, on a : $\left|t^{2n+1}\cos\frac{\pi t}{2}\right| \leq |t|^{2n+1}$.
Donc $0 \leq I_n \leq \int_0^1 t^{2n+1}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2n+2} \to 0$. Donc I_n tend vers 0.

3. Par intégration par parties, on a : $b_n = \int_0^1 t^{2n}\sin\left(\frac{\pi t}{2}\right)\,\mathrm{d}t = \left[\frac{t^{2n+1}}{2n+1}\sin\frac{\pi t}{2}\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{t^{2n+1}}{2n+1}\sin\frac{\pi t}{2}\,\mathrm{d}t$.
Donc $b_n = \frac{1}{2n+1}(1 - I_n) \sim \frac{1}{2n}$.

4. Ainsi $u_n = a_n b_n \sim \frac{2n}{\pi}\frac{1}{2n} = \frac{1}{\pi}$. Donc u_n converge vers $\frac{1}{\pi}$.

Exercice 2 : 1. On a $\sqrt{n^2+n+1} = n(1+1/n+1/n^2)^{1/2}$
$=_{+\infty} n\left[1 + \frac{1}{2n} + \frac{3}{8n^2} + \frac{c}{n^3} + o(1/n^3)\right]$
$=_{+\infty} n + \frac{1}{2} + \frac{3}{8n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$.

2. La série $\sum \frac{(-1)^n}{n}$ est alternée et la suite $(1/n)_{n\geq 1}$ est décroissante et tend vers 0.
D'après le critère spécial des séries alternées, la série harmonique alternée converge.

3. On a $\cos(\pi\sqrt{n^2+n+1}) = \cos\left(n\pi + \pi/2 + \frac{3\pi}{8n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)$
$= (-1)^{n+1}\sin\left(\frac{3\pi}{8n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)$
$= (-1)^{n+1}\frac{3\pi}{8n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$.
On a donc décomposé en somme de $\frac{-3\pi}{8}\sum\frac{(-1)^n}{n}$ et $\sum\frac{1}{n^2}$ deux séries convergentes.
Donc la série obtenue par combinaison linéaire converge.

4. La série n'est pas absolument convergente car $|\cos(\pi\sqrt{n^2+n+1})| \sim \frac{3\pi}{8n}$ et la série à termes positifs $\sum\frac{1}{n}$ diverge.