Chapitre 24 : Réduction des endomorphismes

Dr Nicolas Provost - PCSI1 - LMB

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel avec $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.
On étudie les endomorphismes $u \in \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E)$.

1 Eléments propres d'un endomorphisme

Définition. *On dit que $x \in E$ est un vecteur propre pour la valeur propre $\lambda \in \mathbb{K}$ si $x \neq 0_E$ et $u(x) = \lambda x$.*
L'ensemble des vecteurs propres est le spectre : $Sp_{\mathbb{K}}(u) = \{\lambda \in \mathbb{K}, \exists x \neq 0_E, u(x) = \lambda x\}$.
Pour une valeur propre fixée $\lambda \in Sp_{\mathbb{K}}(u)$, on définit l'espace propre par

$$E_\lambda(u) = \mathrm{Ker}(u - \lambda id_E) = \{x \in E \text{ tel que } u(x) = \lambda x\}.$$

Proposition 1.1. *Les espaces propres d'un endomorphisme sont en somme directe.*

⊗ Ainsi pour $\lambda_1, ..., \lambda_p$ des valeurs propres alors tout vecteur $x \in \bigoplus_{k=1}^p E_{\lambda_k}(u)$ se décompose de manière unique sous la forme $x = \sum_{k=1}^p x_k$ avec $u(x_k) = \lambda_k x_k$.

Définition. *Si $E = \bigoplus_{\lambda \in Sp(u)} E_\lambda(u)$ alors on dit que u est diagonalisable.*
Une matrice carrée $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est diagonalisable si l'application linéaire $f_A : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n, x \mapsto Ax$ canoniquement associée est diagonalisable.

⊗ Si u est diagonalisable alors la matrice de u dans une base de vecteurs propres est diagonale.
⊗ Si A est diagonalisable alors il existe une matrice de passage $P \in GL_n(\mathbb{K})$ et une matrice diagonale D tel que $A = PDP^{-1}$.

2 Polynôme annulateur

Définition. *On dit que $P(X) = \sum_{k=0}^p a_k X^k$ est un polynôme annulateur de u si $P(u) = 0$.*
On appelle polynôme minimal de u, un polynôme unitaire, annulateur de u et minimal en degré. Si il existe, on le note $\mu_u(X)$.
Si E est de dimension finie, on définit le polynôme caractéristique de u par $\chi_u(X) = \det(Xid_E - u)$.

⊗ Le polynôme minimal est unique et si P est annulateur de u alors $\mu_u(X)$ divise $P(X)$.
⊗ Pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on a :

$$\chi_A(X) = X^n - \mathrm{Tr}(A)X^{n-1} + ... + (-1)^n \det A \tag{1}$$

On en déduit que $\mathrm{Tr}(A) = \sum \lambda$ et $\det(A) = \prod \lambda$ sont la somme et le produit des valeurs propres comptées avec multiplicités.

Proposition 2.1. *Si P est annulateur de u alors $Sp_{\mathbb{K}}(u) \subset Rac_{\mathbb{K}}(P)$.*

Théorème 2.2 (Cayley-Hamilton)**.** *Le polynôme caractéristique est annulateur $\chi_u(u) = 0$.*
De plus, si λ est une valeur propre alors :

$$1 \leq \dim E_\lambda(u) \leq \mathrm{mult}_\lambda(\chi_u). \tag{2}$$

3 Diagonalisation et trigonalisation en dimension finie

Proposition 3.1. *Un endomorphisme u est diagonalisable sur $\mathbb{K}$
ssi $\mu_u(X)$ est scindé à racines simples sur $\mathbb{K}$
ssi il existe un polynôme annulateur scindé à racines simples sur $\mathbb{K}$
ssi χ_u est scindé sur $\mathbb{K}$ et pour tout $\lambda \in Sp_{\mathbb{K}}(u), \dim E_\lambda(u) = \text{mult}_\lambda(\chi_u)$.*

Définition. *On définit l'ensemble des matrices orthogonales par :*

$$O_n(\mathbb{R}) = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \textit{ tel que } M^T M = I_n\} \tag{3}$$

$\otimes$ Ce sont les matrices de passage $P = \mathcal{M}at_{\mathcal{C}}(\mathcal{B})$ avec $\mathcal{B}$ une base orthonormée et $\mathcal{C}$ canonique.

Théorème 3.2 (théorème spectral)**.** *Si S est une matrice symétrique réelle alors S est diagonalisable sur $\mathbb{R}$ et les espaces propres sont orthogonaux deux à deux.*

$\otimes$ Dans ce cas, l'algorithme de Gramm-Schmidt donne une base orthonormée dans laquelle la matrice est diagonale. Ceci permet d'écrire $S = PDP^T$ avec $P \in O_n(\mathbb{R})$ une matrice de passage orthogonale.
$\otimes$ Les projecteurs orthogonaux ont des matrices symétriques.
$\otimes$ Les symétriques orthogonales ont des matrices symétriques et orthogonales.

Définition. *On dit que u est trigonalisable si il existe une base dans laquelle la matrice de u est triangulaire supérieure.*

Proposition 3.3. *Un endomorphisme u est trigonalisable sur $\mathbb{K}$ ssi $\chi_u(X)$ est scindé sur $\mathbb{K}$.*