TD 24 : Préparation à l'oral

24 Algèbre

Exo 1 : On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} -1 & -4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$.

- **a)** Montrer que A n'est pas diagonalisable.
- **b)** Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ dont la matrice dans la base canonique est A. Déterminer une base de $\mathbb{R}^2$ tel que la matrice de f soit triangulaire supérieure.
- **c)** Résoudre le système différentiel : $\begin{cases} x' = & -x-4y \\ y' = & x+3y \end{cases}$

Exo 2 : Soient $a_0, ..., a_n$ $n+1$ réels deux à deux distincts.

- **a)** Montrer que si $b_0, ..., b_n$ sont $n+1$ réels quelconques, alors il existe un unique polynôme $P \in \mathbb{R}_n[X]$ vérifiant $P(a_i) = b_i, \forall i \in [\![0, n]\!]$.
- **b)** Soit $k \in [\![0, n]\!]$. Trouver un polynôme, noté L_k, tel que $L_k(a_k) = 1$ et $L_k(a_i) = 0$ pour tout $i \neq k$.
- **c)** Montrer que pour tout $p \in [\![0, n]\!], \sum_{k=0}^{p} a_k^p L_k = X^p$.
- **d)** Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que $P(i) \in \mathbb{Z}$ pour tout $i \in [\![0, n]\!]$. Montrer que $P(\mathbb{Z}) \subset \mathbb{Z}$.

Exo 3 : (CCINP-PSI) Soit E un espace euclidien et $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que, pour tout $x \in E, ||f(x)|| \leq ||x||$. Soit $x_1 \in \mathrm{Ker}(f - id) \cap \mathrm{Im}(f - id)$.

- **a)** Montrer qu'il existe $y \in E$ tel que $x_1 = f(y) - y$
- **b)** Exprimer $f^n(y)$ en fonction de x_1, y et n.
- **c)** Montrer que $E = \mathrm{Ker}(f - id) \oplus \mathrm{Im}(f - id)$.

Exo 4 : Soit $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ vérifiant $M^3 = -M$.

- **a)** Déterminer M si on suppose la matrice diagonalisable.
- **b)** On suppose M non diagonalisable. Montrer que $\mathbb{R}^3 = \mathrm{Ker}M \oplus \mathrm{Im}M$.
- **c)** Montrer que M est semblable à $\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Exo 5 : (CCINP - PSI) Soit $\alpha \in \mathbb{R}^*$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ définie par $[A]_{i,j} = \alpha^{i+j-2}$. Montrer que A est diagonalisable. Déterminer le rang de A et en déduire ses valeurs propres.

Exo 6 : Soient $t \in \mathbb{R}$ et $A = \begin{pmatrix} 1-it & 0 & 2it & 0 \\ 0 & 1-it & 2it & 0 \\ 0 & 0 & 1+it & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1+it \end{pmatrix}$.

- **a)** Montrer que A est diagonalisable sur $M_4(\mathbb{C})$.
- **b)** Calculer A^n pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Exo 7 : On considère une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tel que $A^2 = A^3$.

- **a)** Montrer que si $\mathrm{Tr}(A) = n$ alors $A = I_n$.
- **b)** Montrer que si $\mathrm{Tr}(A) = n - 1$ alors A est diagonalisable sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Exo 8 : Soit E un espace vectoriel réel de dimension finie $n > 0$
et $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que $u^3 + u^2 + u = 0$.

- **a)** Montrer que $\mathrm{Im}u \oplus \mathrm{Ker}u = E$.
- **b)** Montrer que $\mathrm{Im}u = \mathrm{Ker}(u^2 + u + Id)$.
- **c)** On suppose que u n'est pas bijective. Déterminer les valeurs propres de u.
- **d)** Trouver les solutions sous forme matricielle pour $n = 2$.

Exo 9 : Soit u et v deux endomorphismes d'un espace vectoriel E.

a) Soit λ un réel non nul. Prouver que si λ est valeur propre de $u \circ v$, alors λ est valeur propre de $v \circ u$.

b) On considère sur $E = \mathbb{R}[X]$ les endomorphismes définis par :

$$u : P \mapsto \int_1^X P \text{ et } v : P \mapsto P'.$$

Déterminer $\mathrm{Ker}(v \circ u)$ et $\mathrm{Ker}(u \circ v)$. Le résultat de la question **a)** est-il toujours valide pour $\lambda = 0$?

c) Si E est de dimension finie, démontrer que le résultat de la question **a)** est valide pour $\lambda = 0$.

d) Comparer les spectres de $u \circ v$ et $v \circ u$ dans le cas de la dimension finie.

Exo 10 : (Cachan) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

a) Prouver que $\phi : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), X \mapsto X - \mathrm{Tr}(X)A$ est un endomorphisme.

b) Prouver que ϕ est non injective ssi $\mathrm{Tr}(A) = 1$.

c) On suppose $\mathrm{Tr} \neq 1$, résoudre l'équation $\varphi(X) = B$.

d) On suppose que $\mathrm{Tr} = 1$, montrer que ϕ est un projecteur.

Exo 11 : Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel non nul. Soient $f, g \in \mathcal{L}_{\mathbb{R}}(E)$ vérifiant $f \circ g - g \circ f = Id_E$.

a) Montrer que E est de dimension infinie.

b) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, f \circ g^n - g^n \circ f = n g^{n-1}$.

c) On suppose g nilpotente. Montrer que $g = 0$.

d) Soit $E = \mathbb{R}[X]$ et f la dérivation. Trouver g vérifiant l'énoncé qu'en déduire de $\mathbb{R}[X]$.

Exo 12 : (Centrale-PSI) Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & c & b \\ -c & 0 & a \\ -b & -a & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

Trouver $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $A^3 = \alpha A$. En déduire A^n en fonction de α.

Exo 13 : (Centrale-PSI) Soit $E = \mathbb{R}[X]$. Pour $P \in E$ on définit $L(P)(x) = e^{-x} \int_{-\infty}^x P(t) e^t \, \mathrm{d}t$.

a) Montrer que L définit bien un endomorphisme de E.

b) Trouver les éléments propres de L.

25 Probabilité

Exo 1 : (IMT-PC) On considère deux dés, un blanc et un noir. Le dé noir est pipé de sorte que la probabilités d'obtenir un 6 est 1/3 et les autres faces sont équilibrées. Le dé blanc n'est pas pipé. Deux joueurs s'affrontent, chacun choisit un dé et le lance une fois. Un joueur gagne s'il a obtenu le plus grand chiffre ou, en cas d'égalité, s'il a le dé blanc. Quel dé a-t-on intérêt à choisir ?

Exo 2 : (CCINP-PC) Soient X une variable aléatoire réelle telle que X, X^2, X^3 et X^4 soient d'espérance finie avec $E(X) = \alpha$ et $E(X^2) = E(X^4) = 1$.

a) Montrer que $\alpha \in [-1, 1]$.

b) Déterminer la loi de X.

Exo 3 : (IMT-PC) Soit Y une variable aléatoire discrète suivant la loi de Poisson de paramètre 2. Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$ tel que la loi de X conditionnée à $(Y = m)$ soit $\mathcal{B}(m, 1/3)$. Déterminer la loi de X.

Exo 4 : On admet la formule $\frac{1}{(1-x)^{q+1}} = \sum_{k\geq q} \binom{k}{q} x^{k-q}$ pour $|x| < 1$. Soit X et Y deux variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}$ dont la loi du couple est définies par : $\mathbb{P}((X, Y) = (k, n)) = \binom{n}{k} \left(\frac{1}{2}\right)^n p(1-p)^n$.

a) Vérifier que la formule définie bien une loi de probabilité.

b) Déterminer la loi de Y. Commenter. En déduire l'espérance et la variance de Y.

c) Déterminer la loi de X.

Exo 5 : Soit $a > 0$ et $k \in \mathbb{R}$.

a) Trouver la valeur de k pour que $\mathbb{P}(X = n) = k \left(\frac{a}{a+1}\right)^n$ définisse une loi d'une variable aléatoire sur $\mathbb{N}$.

b) Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une famille de telles variables aléatoires mutuellement indépendantes. Déterminer la fonction génératrice de $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$.

c) Calculer de deux manières l'espérance et la variance de S_n.

Exo 6 : (Cachan) Soient $n \geq 2$ un entier et $X_1, ..., X_n$ des V.A. de Bernoulli mutuellement indépendantes, de paramètres respectifs $P_1, ..., p_n$. On pose $S_n = X_1 + ... + X_n$.

a) Donner l'espérance et la variance de S_n.

b) On suppose $p = \frac{p_1+...+p_n}{n}$ fixé, quand la variance est-elle maximale ?

c) Quelle est alors la loi de S_n ?

Exo 7 : Soit $(x_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ une famille de variables aléatoires mutuellement indépendantes suivant une loi de Poisson de paramètre λ. On définit $Z_n = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{X_1+...+X_n}$.

a) Déterminer une constante K telle que $V(Z_n) \sim \frac{K}{n}$.

b) En déduire que pour tout $\varepsilon > 0$, $\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(|Z_n - e^{-\lambda}| \geq \varepsilon) = 0$.

Exo 8 : (ENSAM)Pour X une V.A. à valeurs dans $\mathbb{N}$, montrer que $\mathbb{E}(X) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(X \geq n)$.
On cherche la probabilité de trouver une place dans un parking après avoir fait un certain nombre de tour de celui-ci. On définit pour $n \geq 1$, la V.A. X_n par $X_n = 0$ si on n'a pas trouvé de place et $X_n = 1$ sinon lors du n-ième tour. On suppose $\mathbb{P}(X_n = 1) = \frac{n}{n-1}$. On pose T à valeurs dans $\mathbb{N}$ la V.A. donnant le tour où pour la première fois on trouve une place.
Calculer $\mathbb{P}(T \geq 1)$ puis $\mathbb{E}(T)$.

26 Analyse

Exo 1 : (CCINP - PC) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ et $u_n = \frac{1}{\sum_{k=1}^{n} k^2}$.

- **a)** Trouver $a, b, c \in \mathbb{R}$ tel que $\forall n > 0$, $\frac{1}{n(n+1)(2n+1)} = \frac{a}{n} + \frac{b}{n+1} + \frac{c}{n+1}$.
- **b)** Montrer que $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$. En déduire la nature de $\sum u_n$.
- **c)** A l'aide d'une comparaison somme-intégrale, montrer que $H_{2n} - H_n \to \ln(2)$.
- **d)** Exprimer $\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{2j+1}$ à l'aide de H_n, H_{2n} et n.
- **e)** Calculer $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$.

Exo 2 : Soit f, de classe C^1 sur $[a, b]$, nulle en a et en b. Montrer que f' s'annule au moins une fois sur $[a, b]$. Justifier l'existence de $M = \sup_{[a,b]} |f'|$. Montrer que $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \leq M\frac{(b-a)^2}{4}$. Préciser le cas d'égalité.

Exo 3 : Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $I_n = \int_0^1 \frac{1}{(1+t^2)^n}\,\mathrm{d}t$.

- **a)** Montrer que la suite $(I_n)_{n\geq 0}$ est bien définie.
- **b)** Etudier la suite $(I_n)_{n\geq 0}$.
- **c)** Etudier la convergence de $\sum(-1)^n I_n$
- **d)** Etudier la convergence de $\sum I_n$

Exo 4 : On considère $f(x) = \int_0^1 \frac{e^{-x^2(1+t^2)}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$ et $g(x) = \int_0^x e^{-t^2}\,\mathrm{d}t$

- **a)** Exprimer f en fonction de g.
- **b)** En déduire la valeur de $\int_0^\infty e^{-t^2}\,\mathrm{d}t$

Exo 5 : (ENSAM) Soit $f(x) = \int_x^{2x} \frac{\mathrm{d}t}{t-\ln(t)}$.

- **a)** Montrer que f est continue et dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, préciser ses variations.
- **b)** Montrer que $\lim_{x\to\infty} \int_x^{2x} \frac{1}{t-\ln(t)} - \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t = 0$.
- **c)** En déduire que f admet une limite finie en $+\infty$.
- **d)** Montrer que f est prolongeable et dérivable en 0.

Exo 6 : (ENSAM) Pour $n \in \mathbb{N}$, on note : $I_n = \int_0^\pi \frac{\sin((n+1/2)t)}{2\sin(t/2)}\,\mathrm{d}t$.

- **a)** Justifier la définition de I_n.
- **b)** Calculer $I_{n+1} - I_n$ et en déduire I_n.
- **c)** Soit $f : [0, \pi] \to \mathbb{R}$ de classe C^1. Montrer que $\lim_{n\to\infty} \int_0^\pi f(t)\sin((n+1/2)t)\,\mathrm{d}t = 0$.
- **d)** Montrer que $f : t \mapsto \frac{1}{2\sin(t/2)} - \frac{1}{t}$ est de classe C^1 sur $[0, \pi]$.
- **e)** En déduire l'existence et la valeur de $\int_0^\infty \frac{\sin(t)}{t}\,\mathrm{d}t$.

Exo 7 : (ENSAM) Montrer que $\sum \frac{1}{k^2-1}$ est une série convergente. Déterminer la somme de la série. Montrer que $\sum_{k\geq 2} \frac{E(\sqrt{k+1})-E(\sqrt{k})}{k}$ est convegente et calculer sa somme.

Exo 8 : (ENSAM) Soient $a, b \in \mathbb{R}$. L'équation différentielle $y''(t) - 4y(t) = a|t| + b$ admet-elle des solutions C^2 sur $\mathbb{R}$ possédant des asymptotes en $\pm\infty$?

Exo 9 : (ENSAM) Calculer $\int_0^\infty \frac{x-\mathrm{Arctan}\,(x)}{x(1+x^2)\mathrm{Arctan}\,(x)}\,\mathrm{d}x$.