TD 1 : Logique et éléments de calcul

1.1 Logique formelle

Exercice 1 ($\star$) Déterminer parmi les propositions suivantes lesquelles sont vraies :

a) $\forall y \in \mathbb{R}^*, \exists x \in \mathbb{R}^*, \forall z \in \mathbb{R}^*, z - xy = 0.$

b) $\forall y \in \mathbb{R}^*, \forall z \in \mathbb{R}^*, \exists x \in \mathbb{R}^*, z - xy = 0.$

c) $\forall \varepsilon > 0, \exists a \in \mathbb{R}^*, |a| < \varepsilon.$

d) $\forall x \in \mathbb{N}, [(\exists y \in \mathbb{N}, (x = 4y)) \Rightarrow \exists z \in \mathbb{N}, (x = 2z)].$

e) $\forall x \in \mathbb{R}, \forall z \in \mathbb{R}, (x < z \Rightarrow \exists y \in \mathbb{R}, x < y < z).$

Exercice 2 ($\star\star$) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction. Traduire en français les assertions suivantes puis donner, lorsque cela est possible, une fonction satisfaisant la proposition et une fonction ne la satisfaisant pas :

a) $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, f(x) < f(y).$

b) $\forall x \in \mathbb{R}, \exists T \in \mathbb{R}, f(x) = f(x+T).$

c) $\forall x \in \mathbb{R}, \exists T \in \mathbb{R}^*, f(x) = f(x+T).$

d) $\exists x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, y = f(x).$

1.2 Equations et Inéquations

Exercice 3 ($\star\star$) Raisonnement par analyse-synthèse.
Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

a) $\sqrt{2x+3} - \sqrt{x+2} = 2.$

b) $\sqrt{x+3-4\sqrt{x-1}} + \sqrt{x+8-6\sqrt{x-1}} = 1.$

c) $\sqrt{x^2+mx-1} = 3m - x$ pour un paramètre réel $m \in \mathbb{R}$.

d) $\sqrt{x+\sqrt{2x-1}} + \sqrt{x-\sqrt{2x-1}} = m$ pour un paramètre réel $m \in \mathbb{R}$.

e) $\frac{1}{x} + \frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{x+a+b}$ pour des paramètres réels $a, b \in \mathbb{R}$.

Exercice 4 ($\star$) Etude de signe.
Résoudre sur $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :

a) $x^3 - 3x + 2 > 0.$

b) $\frac{2}{x} + \frac{4}{x+4} > 1.$

c) $2x + 1 < \sqrt{x^2+8}.$

d) $\left(\frac{2x}{1-\sqrt{1+2x}}\right)^2 < 2x + 9.$

1.3 Raisonnement par récurrence

Exercice 5 ($\star$) Démontrer par récurrence que :

a) $\forall n \in \mathbb{N}^*, 2^{n-1} \leq n! \leq n^n.$

b) $\forall x > 0, \forall n \in \mathbb{N}^*, (1+x)^n \geq 1 + nx.$

Exercice 6 ($\star$) On définit une suite $(u_n)_{n>0}$ par $u_1 = 1$ et pour $n \in \mathbb{N}^*, u_{n+1} = n^{-n} \sum_{k=1}^{n} u_k^k$.
Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*, 0 < u_n \leq 1$.

Exercice 7 ($\star$) Soit $\theta \in \mathbb{R}$. On considère une suite $(u_n)_{n\geq 0}$ par ses premiers termes $u_0 = 1$ et $u_1 = \cos\theta$, ainsi que la relation de récurrence pour $n \geq 0, u_{n+2} = 2u_1u_{n+1} - u_n$.
Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}, u_n = \cos(n\theta)$.

1.4 Calcul de sommes

Exercice 8 ($\star$) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer les sommes suivantes :

a) $\sum_{k=1}^{n} k(k+1)$

b) $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}$

c) $\sum_{k=0}^{n} (-1)^k(2k+1).$

d) $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 3^{k/2} 6^{n-2k}$

e) $\sum_{k=1}^{n} k2^k$

f) $\sum_{k=0}^{n} \cos^2\left(\frac{k\pi}{2n}\right)$

Exercice 9 ($\star\star$) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer les sommes doubles suivantes :

a) $\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} (i+j)^2$

b) $\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \min(i,j)$

c) $\sum_{1 \leq i \leq j \leq n} (2i+3j)$

d) $\sum_{1 \leq i \leq j \leq n} 2^i$

1.5 Résolution de système

Exercice 10 ($\star$) Déterminer les couples de solutions des systèmes :

a) $\begin{cases} x+y & = 17 \\ x-y & = 23 \end{cases}$

b) $\begin{cases} xy & = 21 \\ x+y & = 10 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 2xy + x - 2y & = 7 \\ 2xy - x + 2y & = 5 \end{cases}$

d) $\begin{cases} x^2 + y^2 & = 29 \\ x+y & = -3 \end{cases}$

Exercice 11 ($\star$) Résoudre les systèmes linéaires suivants et décrire géométriquement l'ensemble des solutions.

a) $\begin{cases} x - y + 2z & = 0 \\ 2x + y - z & = 2 \\ x + 2y + z & = 4 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x - y + z & = 1 \\ x + 2y - z & = -2 \\ x - 3y + 3z & = 2 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x + 2y + z & = 0 \\ 2x + y + 2z & = 0 \end{cases}$

d) $\begin{cases} x + y + \alpha z & = 0 \\ x + \alpha y + z & = 0 \\ \alpha x + y + z & = 0 \end{cases}$
avec $\alpha \in \mathbb{R}$.

1.6 Trigonométrie

Exercice 12 ($\star$) Résoudre et représenter sur le cercle trigonométrique les solutions de :

a) $\cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right)$.

b) $\tan(4x) = \sqrt{3}$.

c) $\cos(5x) = 0$.

d) $\cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) \geq \frac{1}{2}$.

e) $\cos(2x - \pi/3) = \sin(x + 3\pi/4)$.

f) $\cos^4 x + \sin^4 x = 1$.

g) $\sin x + \sin 3x = 0$.

h) $\sin x + \sin(2x) + \sin(3x) = 0$.

Exercice 13 ($\star$) Etudier les variations sur $\mathbb{R}$ de la fonction f définie par :

$$f(x) = \cos(5x) + 5\cos(x).$$

Exercice 14 ($\star$)

a) Montrer que $f : x \mapsto \cos(x)\sin(3x)$ est $\pi-$périodique et impaire.

b) Calculer l'intégrale $\int_0^{2\pi} f(x)\,\mathrm{d}x$.