TD1 corrigé

Exercice 1

Indication :

On montre qu'une proposition est fausse, en montrant que sa négation est Vraie. Pour écrire la négation, on dispose des règles :

— non(P ou Q) = non(P) et non(Q)
— non(P et Q) = non(P) ou non(Q)
— non($\forall x \in A, P(x)$) = $\exists x \in A$, non($P(x)$)
— non($\exists x \in A, P(x)$) = $\forall x \in A$, non($P(x)$)

Pour démontrer des assertions, on introduit dans l'ordre de lecture les inconnues avec la rédaction standardisée :

— $\forall a \in A$ devient 'Soit $a \in A$' est un élément quelconque.
— $\exists b \in B$ devient 'On pose $b = ...$' une expression qui ne dépend que des variables déjà introduites.

On démontre les implications directement, par contraposée ou par l'absurde.

Solution :

a) Faux. Sa négation est $\exists y \in \mathbb{R}^*, \forall x \in \mathbb{R}^*, \exists z \in \mathbb{R}^*, z - xy \neq 0$.
On pose $y = 1 \in \mathbb{R}^*$.
Soit $x \in \mathbb{R}^*$.
On pose $z = 2x$.
On a bien $z - xy = x \neq 0$.

b) Vrai. Soit $y, z \in \mathbb{R}_+^*$. On pose $x = \dfrac{z}{y} > 0$. Ils vérifient bien $z - xy = 0$.

c) Vrai. Soit $\varepsilon > 0$. On pose $a = \varepsilon/2$. On a bien $a \in \mathbb{R}^*$ et $|a| = \varepsilon/2 < \varepsilon$.

d) Vrai.
Soit $x \in \mathbb{N}$.
On suppose qu'il existe $y \in \mathbb{N}$ tel que $x = 4y$.
On pose $z = 2y$. On a bien $z \in \mathbb{N}$ et $x = 2z$.

e) Vrai. Soient $x, z \in \mathbb{R}$.
On suppose $x < z$.
On pose $y = \dfrac{x+z}{2}$. On a bien $y \in \mathbb{R}$ et $y - x = z - y = \dfrac{z-x}{2} > 0$.
Donc $x < y < z$.

Exercice 2

Indication :

On s'appuie sur le graphe d'une telle fonction f pour introduire des exemples ou contre-exemples.

Pour la démonstration, on procède en suivant la stratégie de l'**Exercice 1**.

Solution :

a) La fonction n'admet pas de maximum global.
En effet, la négation est $\exists x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, f(x) \geq f(y)$. Ce qui signifie que f admet un maximum au point x.
Ainsi $x \mapsto x$ satisfait la proposition et $x \mapsto \cos(x)$ ne la satisfait pas.

b) La proposition est triviale (toujours vraie).
En effet, pour $x \in \mathbb{R}$, on pose $T = 0$ et $f(x+T) = f(x)$.
Ainsi toutes les fonctions vérifient la proposition et aucune sa négation.

c) La proposition signifie la fonction prend chaque valeur au moins deux fois.
La fonction $x \mapsto \sin(x)$ est 2π-périodique donc en particulier convient.
La fonction $x \mapsto e^x$ est strictement croissante. Donc elle prend chacune des valeurs une unique fois.

d) La proposition est toujours fausse.
Sa négation est $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, y \neq f(x)$.
En effet, pour $x \in \mathbb{R}$, on pose $y = f(x) + 1$ qui convient à $y \neq f(x)$.

Exercice 3

Indication :

Résoudre une équation (E) revient à trouver un ensemble de solution $\mathcal{S}_E$ tel qu'on ait l'équivalence : $x \in \mathcal{S}_E \Leftrightarrow x$ vérifie l'équation (E).

Si l'on ne peut pas raisonner par équivalences successives, on réalise une Analyse-Synthèse.

Analyse : On considère x qui vérifie (E) puis on en déduit des conditions nécessaires. On établit ainsi une liste de candidats.

Synthèse : On teste chacun des candidats pour identifier les solutions.

Exemple :

$(E) : \sqrt{x+2} = x$.

Analyse : On considère une solution x de (E) alors $x + 2 = x^2$ (on perd ici l'équivalence). Puis les solutions de $x^2 - x - 2 = 0$ sont -1 et 2, les deux candidats.

Synthèse : on teste $x = -1$: $\sqrt{-1+2} = 1 \neq -1$. Et pour $x = 2$: $\sqrt{2+2} = 2$.

Conclusion : Par analyse-synthèse $x = 2$ est l'unique solution.

Solution :

a) Analyse. Pour x une solution réelle, on en déduit en passant au carré :
$2x + 3 = (2 + \sqrt{x+2})^2 = 4 + 4\sqrt{x+2} + x + 2$.
On isole la racine pour avoir $4\sqrt{x+2} = x - 3$.
On en déduit $16(x + 2) = x^2 - 6x + 9$ en passant au carré.
On obtient le trinôme $x^2 - 22x - 23 = 0$ dont les racines sont -1 et 23.
Synthèse. Pour $x = -1$, $\sqrt{1} - \sqrt{1} = 0 \neq 2$.
Pour $x = 23$, $\sqrt{49} - \sqrt{25} = 2$.
Conclusion. Le nombre 23 est l'unique solution de l'équation.

b) On effectue un changement d'inconnue. Soit $x \in [1, +\infty[$. On note $y = \sqrt{x-1}$.
On a donc $x = y^2 + 1$ et x est solution ssi $\sqrt{y^2 + 4 - 4y} + \sqrt{y^2 + 9 - 6y} = 1$ ssi $\sqrt{(y-2)^2} + \sqrt{(y-3)^2} = 1$ ssi $|y - 2| + |y - 3| = 1$ car $\sqrt{a^2} = |a|$.
Par disjonction de cas : Si $y \leq 2$, on a : $2 - y + 3 - y = 1$ ssi $y = 2$.
Si $2 \leq y \leq 3$, on a : $y - 2 + 3 - y = 1$ est toujours Vraie.
Si $y \geq 3$, on a $y - 2 + y - 3 = 1$ ssi $y = 3$.
Ainsi les solutions sont pour $y \in [2, 3]$ ssi $x = y^2 + 1 \in [5, 10]$.

c) Soit $m \in \mathbb{R}$. Analyse : Pour $x \in \mathbb{R}$ une solution, on déduit :
$x^2 + mx - 1 = x^2 - 6mx + 9m^2$.
Donc $7mx = 9m^2 + 1$ d'où $x = \dfrac{9m^2+1}{7m}$ si $m \neq 0$.
Synthèse : Il suffit de vérifier que $3m - x \geq 0$ pour valider le passage au carré.
Ainsi $3m - x = 3m - \dfrac{9m^2+1}{7m} = \dfrac{12m^2-1}{7m} \geq 0$ ssi $m \in [-\sqrt{3}/6, 0[\cup[\sqrt{3}/6, +\infty[$.
Dans ce cas, il existe une unique solution. Sinon l'équation n'a pas de solution.

d) Soient $m \in \mathbb{R}$ et $x \in \mathbb{R}$ tel que $x \geq 1/2$.

On note $y = \sqrt{2x-1} \geq 0$ et on a $x = \dfrac{y^2+1}{2}$.

On a $\sqrt{x+\sqrt{2x-1}} + \sqrt{x-\sqrt{2x-1}}$

$= \dfrac{\sqrt{2}}{2}\left(\sqrt{y^2+1+2y} + \sqrt{y^2+1-2y}\right)$

$= \dfrac{\sqrt{2}}{2}\left(|y+1| + |y-1|\right)$.

Par disjonction de cas, si $0 \leq y \leq 1$, on a :$(y+1)+(1-y) = \sqrt{2}m$ ssi $2 = \sqrt{2}m$.

Si $y \geq 1$, on a : $(y+1)+(y-1) = \sqrt{2}m$ ssi $y = \dfrac{\sqrt{2}}{2}m$.

Conclusion : Si $m = \sqrt{2}$ alors l'ensemble des solutions est $y \in [0,1]$ ssi $x \in [1/2, 1]$.

Si $m \geq \sqrt{2}$ alors l'unique solution est $y = \dfrac{\sqrt{2}}{2}m$ ssi $x = \dfrac{m^2+2}{4}$.

Si $m < \sqrt{2}$ alors il n'y a pas de solution.

e) Soient $a, b \in \mathbb{R}^*$. Soit $x \in \mathbb{R} \setminus \{0, -a-b\}$.

On a $\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} = \dfrac{1}{x+a+b}$ ssi $\dfrac{ab+xb+xa}{xab} = \dfrac{1}{x+a+b}$

ssi $[ab + x(a+b)](x+a+b) - xab = 0$

ssi $(a+b)x^2 + [(a+b)^2 + ab - ab]x + (a+b)ab = 0$

ssi $a+b = 0$ ou $x^2 + (a+b)x + ab = 0$

ssi $a+b = 0$ ou $x = -a$ ou $x = -b$.

Conclusion : Si $a+b = 0$ alors $\mathbb{R}^*$ est l'ensemble des solutions.

Sinon l'ensemble des solutions est $\{-a, -b\}$.

Exercice 4

Indication :

Pour montrer que $a < b$, on étudie le signe de la différence $b - a$. Pour cela, on peut factoriser l'expression afin d'établir des tableaux de signes et conclure. On peut également étudier les variations d'une fonction (en dérivant) pour étudier son signe.

Solution :

a) Le polynôme admet 1 comme racine donc $x^3 - 3x + 2 = (x-1)(x^2 + \alpha x - 2)$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$ à déterminer. En développant, on trouve les conditions $\begin{cases} -2-\alpha & = -3 \\ \alpha - 1 & = 0 \end{cases}$

donc $\alpha = 1$ convient.

Puis $x^2+x-2 = (x-1)(x+2)$ donc $x^3-3x+2 = (x-1)^2(x+2)$ et est strictement positif dans le domaine $]-2,1[\cup]1,+\infty[$.

b) Soit $x \in \mathbb{R} \setminus \{-4, 0\}$. On étudie le signe de : :

$f(x) = \dfrac{2}{x} + \dfrac{4}{x+4} - 1 = \dfrac{2(x+4)+4x-x(x+4)}{x(x+4)} = \dfrac{-x^2+2x+8}{x(x+4)}$

Les racines du numérateur sont -2 et 4. Donc on peut établir un tableau de signes et on obtient $f(x) > 0$ ssi $x \in]-4,-2[\cup]0,4[$.

c) On peut élever au carré si $2x+1 \geq 0$.

1er cas : Si $x < -1/2$ on a : $2x+1 < 0 \leq \sqrt{x^2+8}$ est toujours vraie.

2eme cas : Si $x \geq -1/2$, on a : $2x+1 < \sqrt{x^2+8}$ ssi $4x^2+4x+1 < x^2+8$

ssi $3x^2+4x-7 < 0$ ssi $x \in]-7/3, 1[\cap[-1/2,+\infty[= [-1/2, 1[$.

Conclusion : L'ensemble des solutions est $]-\infty, 1[$.

d) Soit $x \in \mathbb{R}$ tel que $x > -1/2$ et $x \neq 0$. On pose $y = \sqrt{2x+1}$.

On a $2x + 9 - \left(\dfrac{2x}{1-\sqrt{1+2x}}\right)^2 = y^2 + 8 - \left(\dfrac{y^2-1}{1-y}\right)^2$

$= y^2 + 8 - (y+1)^2 = -2y + 7$.

Ceci est strictement positif ssi $y \in [0, 7/2[$

ssi $x = \dfrac{y^2-1}{2} \in \left]-\dfrac{1}{2}, \dfrac{45}{8}\right[\setminus \{0\}$.

Exercice 5

Indication :

La rédaction des étapes Initialisation, Hérédité et Conclusion doit être fluide et efficace. L'introduction du prédicat $P(n)$ n'est pas indispensable si il est 'court'.

Initialisation. Pour $n = 1$, on a : [*démonstration de* $P(1)$].

Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on suppose $P(n)$. On a : [*démonstration de* $P(n+1)$].

Conclusion. Par principe de récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $P(n)$.

Solution :

a) Initialisation. : Pour $n = 1$, on a $2^0 = 1 \leq 1! = 1 \leq 1^1 = 1$.

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $2^{n-1} \leq n! \leq n^n$.

On a $2^n = 2 \times 2^{n-1} \leq 2 \times n!$ par H.R.

$\leq (n+1) \times n! = (n+1)!$ car $n + 1 \geq 2$ et $n! > 0$.

Puis $(n+1)! = (n+1) \times n! \leq (n+1) \times n^n$ par H.R.

$\leq (n+1) \times (n+1)^n = (n+1)^{(n+1)}$ par croissance de $x \mapsto x^n$.

Conclusion : Par principe de récurrence, la proposition est toujours vraie.

b) Soit $x > 0$. Init. : Pour $n = 1$, on a $(1+x)^1 = 1 + 1.x$.

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $(1+x)^n \geq 1 + nx$.

On a $(1+x)^{n+1} = (1+x)^n \times (1+x) \geq (1+nx)(1+x)$ par H.R. et $(1+x) > 0$

$= 1 + (n+1)x + x^2 \geq 1 + (n+1)x$ car $x^2 > 0$.

Conclusion : Par principe de récurrence, la proposition est toujours vraie.

Exercice 6

Indication :

Le $(n+1)$-ième terme de la suite dépend de tous les précédents. Il faut rédiger une récurrence totale.

L'hypothèse de l'hérédité est dans ce cas : 'Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $k \leq n, P(k)$'.

Solution :

On le démontre par récurrence totale.

Initialisation : Pour $n = 1$, on a $u_1 = 1$ donc $0 < u_1 \leq 1$.

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On suppose que pour tout $k \leq n$, on a acquis $0 < u_k \leq 1$.

On a $u_{n+1} = n^{-n} \displaystyle\sum_{k=1}^{n} u_k^k > 0$ par H.R.

Et $u_{n+1} = n^{-n} \displaystyle\sum_{k=1}^{n} u_k^k \leq n^{-n} \sum_{k=1}^{n} 1^k$ par H.R.

$\leq n^{-n} \times n = n^{1-n} \leq 1$ car $1 - n \leq 0$.

Conclusion : Par principe de récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}^*, 0 < u_n \leq 1$.

Exercice 7

Indication :

On la démontre par récurrence double car l'expression d'un terme dépend des deux précédents.

Initialisation : Il faut démontrer les deux premiers rangs.

Hypothèse de l'hérédité : 'Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $P(n)$ et $P(n+1)$'.

Solution :

Les premiers termes sont $u_2 = 2\cos^2\theta - 1 = \cos(2\theta)$

Puis $u_3 = 2\cos\theta\cos(2\theta) - \cos\theta = [\cos(3\theta) + \cos\theta] - \cos\theta = \cos(3\theta)$.

Initialisation : Le calcul des premiers termes montrent l'init. pour $n = 0, 1, 2$ et 3.

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose $u_n = \cos(n\theta)$ et $u_{n+1} = \cos[(n+1)\theta]$.

On a $u_{n+2} = 2\cos\theta\cos[(n+1)\theta] - \cos(n\theta)$

$= \cos[(n+1)\theta + \theta] + \cos[(n+1)\theta - \theta] - \cos(n\theta)$

$= \cos[(n+2)\theta]$.

Conclusion : Pour tout $n \in \mathbb{N}, u_n = \cos(n\theta)$.

Exercice 8

Indication :

On regarde quelle technique s'adapte le mieux parmi :

linéarisation, télescopage, conjecture et récurrence, formule du binôme et de somme des puissances.

Solution :

a) On a $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k(k+1) = \sum_{k=1}^{n} k^2 + \sum_{k=1}^{n} k$ (Linéarisation)

$\displaystyle = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{n(n+1)}{2}$

$\displaystyle = \frac{n(n+1)}{6}[2n+1+3]$

$\displaystyle = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$.

b) On peut remarquer $\displaystyle\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} = \frac{1}{k(k+1)}$ et utiliser un télescopage de la somme.

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} = 1 - \frac{1}{n+1} = \frac{n}{n+1}.$$

c) Notons $\displaystyle S_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k(2k+1)$.

On a $S_0 = 1, S_1 = -2, S_2 = 3, S_3 = -4$.

On peut conjecturer $S_n = (-1)^n(n+1)$ et le démontrer par récurrence.

Init. : Fait par la conjecture pour $n \in \{0, 1, 2, 3\}$.

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $S_n = (-1)^n(n+1)$.

On a $S_{n+1} = S_n + (-1)^{n+1}(2n+3) = (-1)^{n+1}[-n-1+2n+3] = (-1)^{n+1}(n+2)$.

Conclusion : Pour tout $\displaystyle n \in \mathbb{N}, \sum_{k=0}^{n} (-1)^k(2k+1) = (-1)^n(n+1)$.

d) La présence des coefficients binomiaux suggère d'utiliser la formule du binôme de Newton.

On a : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}3^{k/2}6^{n-2k}=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}6^{n-k}\sqrt{3}^{k}(1/6)^{k}=(6+\sqrt{3}/6)^{n}=\left(\frac{36+\sqrt{3}}{6}\right)^{n}$.

e) On fait apparaître une somme triangulaire afin d'inverse l'ordre de sommation.

On a $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}k2^{k}=\sum_{k=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{k}1\right)2^{k}$

$\displaystyle=\sum_{1\leq i\leq k\leq n}2^{k}=\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=i}^{n}2^{k}$

$\displaystyle=\sum_{i=1}^{n}2^{i}\frac{2^{n-i+1}-1}{2-1}=\sum_{i=1}^{n}2^{n+1}-2^{i}$

$\displaystyle=n2^{n+1}-2\frac{2^{n}-1}{2-1}=(n-1)2^{n+1}+2.$

f) On fait apparaître la formule $\cos^2+\sin^2=1$ à l'aide de $\cos(\theta)=\sin(\pi/2-\theta)$.

On note $\displaystyle S_n=\sum_{k=0}^{n}\cos^2\left(\frac{k\pi}{2n}\right)$.

On a $\displaystyle S_n=\sum_{k=0}^{n}\cos^2\left(\frac{(n-k)\pi}{2n}\right)=\sum_{k=0}^{n}\cos^2\left(\frac{\pi}{2}-\frac{k\pi}{2n}\right)=\sum_{k=0}^{n}\sin^2\left(\frac{k\pi}{2n}\right)$.

Donc $\displaystyle 2S_n=\sum_{k=0}^{n}\cos^2\left(\frac{k\pi}{2n}\right)+\sin^2\left(\frac{k\pi}{2n}\right)=\sum_{k=0}^{n}1=n+1.$

On en déduit que $\displaystyle S_n=\frac{n+1}{2}$.

Exercice 9

<u>*Indication :*</u>

On calcul la somme la plus à l'intérieur en considérant l'autre variable comme étant fixée. Suivant la somme, on a la formule qui permet d'échanger l'ordre des variables :

Somme carrée : $\displaystyle\sum_{1\leq i,j\leq n}a_{i,j}=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{i,j}=\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}a_{i,j}$.

Somme triangulaire : $\displaystyle\sum_{1\leq i\leq j\leq n}a_{i,j}=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=i}^{n}a_{i,j}=\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{j}a_{i,j}$.

<u>*Solution :*</u>

a) On a $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(i+j)^2=\sum_{1\leq i,j\leq n}i^2+2ij+j^2$

$\displaystyle=\sum_{1\leq i,j\leq n}i^2+2\sum_{1\leq i,j\leq n}ij+\sum_{1\leq i,j\leq n}j^2$

Or $\displaystyle\sum_{1\leq i,j\leq n}i^2=\sum_{i=1}^{n}i^2\sum_{j=1}^{n}1=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.n.$

Par symétrie des rôles de i et j, $\displaystyle\sum_{1\leq i,j\leq n}j^2=\frac{n^2(n+1)(2n+1)}{6}$ également.

Puis $\displaystyle\sum_{1\leq i,j\leq n}ij=\left(\sum_{i=1}^{n}i\right)\left(\sum_{j=1}^{n}j\right)=\frac{n(n+1)}{2}\frac{n(n+1)}{2}$.

Donc $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(i+j)^2 = \frac{n^2(n+1)(2n+1)}{6} + 2\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 + \frac{n^2(n+1)(2n+1)}{6}$
$\displaystyle = \frac{n^2(n+1)}{6}(2(2n+1)+3(n+1)) = \frac{n^2(n+1)(7n+5)}{6}$.

b) On a $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\min(i,j)$
$\displaystyle = \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{i-1} j + \sum_{j=i}^{n} i\right)$
$\displaystyle = \sum_{i=1}^{n}\frac{i(i-1)}{2} + (n-i+1)i$
$\displaystyle = \frac{-1}{2}\sum_{i=1}^{n} i^2 + (n+1/2)\sum_{i=1}^{n} i$
$\displaystyle = \frac{-1}{2}\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{2n+1}{2}\frac{n(n+1)}{2}$
$\displaystyle = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

c) On a $\displaystyle\sum_{1\leq i\leq j\leq n}(2i+3j)$
$\displaystyle = 2\sum_{1\leq i\leq j\leq n} i + 3\sum_{1\leq i\leq j\leq n} j$
$\displaystyle = 2\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=i}^{n} i + 3\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{j} j$
$\displaystyle = 2\sum_{i=1}^{n}(n-i+1)i + 3\sum_{j=1}^{n} j^2$
$\displaystyle = 2(n+1)\sum_{i=1}^{n} i - 2\sum_{i=1}^{n} i^2 + 3\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$
$\displaystyle = n(n+1)^2 + \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{n(n+1)(8n+7)}{6}$.

d) On a : $\displaystyle\sum_{1\leq i\leq j\leq n} 2^i = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{j} 2^i$
$\displaystyle = \sum_{j=1}^{n} 2\frac{2^j-1}{2-1} = \sum_{j=1}^{n} 2^{j+1} - \sum_{j=1}^{n} 2$
$= 4(2^n-1) - 2n = 2^{n+2} - 2n - 4$.

Exercice 10

Indication :

On fait apparaître un polynôme pour les systèmes de type somme-produit.

$\begin{cases} a+b &= S \\ ab &= P \end{cases}$ ssi $\{a,b\}$ sont les racines de $X^2 - SX + P$.

Solution :

a) Il s'agit d'un système somme-différence.

On a $\begin{cases} x+y &= 17 \\ x-y &= 23 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x &= 40,\ L_1 \leftarrow L_1 + L_2 \\ 2y &= -6,\ L_1 \leftarrow L_1 - L_2 \end{cases} \Leftrightarrow x = 20$ et $y = -3$.

b) Il s'agit d'un système somme-produit.
On recherche les racines de $X^2 - 10X + 21$.
Le discriminant est $\Delta = 100 - 84 = 16 = 4^2$.
Donc les solutions sont $\dfrac{10 \pm 4}{2}$ Ainsi $(x, y) = (3, 7)$ ou $(x, y) = (7, 3)$.

c) Le système somme-différence se résout en $2xy = \dfrac{7+5}{2} = 6$ et $x - 2y = \dfrac{7-5}{2} = 1$.
On reconnait un système somme-produit en les inconnues $\{x, -2y\}$.
Ainsi x et $-2y$ sont les racines de $X^2 - X - 6 = (X-3)(X+2)$.
Donc $(x, -2y) = (3, -2)$ ou $(x, -2y) = (-2, 3)$
ssi $(x, y) = (3, 1)$ ou $(x, y) = (-2, -3/2)$.

d) Analyse : On déduit $2xy = (x+y)^2 - (x^2 + y^2) = -20$.
Le système somme-produit $\begin{cases} x+y &= -3 \\ xy &= -10 \end{cases}$ admet pour solution $(2, -5)$ et $(-5, 2)$.
La synthèse confirme les deux couples de solutions.

Exercice 11

Indication :

On utilise la méthode du Pivot pour les systèmes linéaires (sans produit).
Les variables sans pivots sont dites libres et servent de paramètres.
Les ensembles linéaires sans paramètre sont l'ensemble vide ou un point, avec un paramètre les droites (données par un point et un vecteur directeur) et avec deux paramètres les plans (données par un point et un vecteur normal).

Exemple :

Si l'ensemble des solutions est de la forme $\{(1+2t, 3+t, -1-t)$ pour $t \in \mathbb{R}\}$. Alors les points solutions parcourent les valeurs de $(1, 3, -1) + \mathbb{R}(2, 1, -1)$ c'est à dire la droite qui passe par le point $(1, 3, -1)$ et qui est dirigée par le vecteur $(2, 1, -1)$.

Solution :

a) On utilise la méthode du Pivot : $\begin{cases} x - y + 2z &= 0 \\ 2x + y - z &= 2 \\ x + 2y + z &= 4 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - y + 2z &= 0 \\ \quad 3y - 5z &= 2 \\ \quad 3y - z &= 4 \end{cases} \text{ avec } L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1, L_3 \leftarrow L_3 - L_1$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - y + 2z &= 0 \\ \quad 3y - 5z &= 2 \\ \quad\quad 4z &= 2 \end{cases} \text{ avec } L_3 \leftarrow L_3 - L_2$$

$\Leftrightarrow z = 1/2, y = (2 + 5/2)/3 = 3/2$ et $x = 3/2 - 2/2 = 1/2$.
L'ensemble des solutions est le point $(1/2, 3/2, 1/2)$.

b) De même on obtient $\begin{cases} x - y + z &= 1 \\ x + 2y - z &= -2 \\ x - 3y + 3z &= 2 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x-y+z &= 1 \\ 3y-2z &= -3 \\ -2y+2z &= 1 \end{cases} \text{ avec } L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \text{ et } L_3 \leftarrow L_3 - L_1$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x-y+z &= 1 \\ y &= -2 \\ -y+z &= 1/2 \end{cases} \text{ avec } L_2 \leftarrow L_2 + L_3 \text{ et } L_3 \leftarrow L_3/2$$

$\Leftrightarrow y = -2, z = -3/2$ et $x = 1 + (-2) - (-3/2) = 1/2$.
L'ensemble des solutions est le point $(1/2, -2, -3/2)$.

c) On a $\begin{cases} x+2y+z &= 0 \\ 2x+y+2z &= 0 \end{cases}$ ssi $\begin{cases} x+z &= 0 \\ y &= 0 \end{cases}$.

Ainsi z est libre car sans pivot. Donc $\begin{cases} x &= -z \\ y &= 0 \\ z &\in \mathbb{R} \end{cases}$. L'ensemble des solutions est $\{(-z,0,z) \text{ pour } z \in \mathbb{R}\} = (-1,0,1)\mathbb{R}$. Donc c'est la droite dirigée par $(-1,0,1)$ et qui passe par $(0,0,0)$.

d) Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. On a $\begin{cases} x+y+\alpha z &= 0 \\ x+\alpha y+z &= 0 \\ \alpha x+y+z &= 0 \end{cases}$

ssi $\begin{cases} x+y+\alpha z &= 0 \\ (\alpha-1)y+(1-\alpha)z &= 0 \\ (1-\alpha)y+(1-\alpha^2)z &= 0 \end{cases}$ avec $L_2 \leftarrow L_2 - L_1, L_3 \leftarrow L_3 - \alpha L_1$

Si $\alpha \neq 1$ alors on peut faire des dilatations par $\dfrac{1}{1-\alpha}$ et on obtient

$\begin{cases} x+y+\alpha z &= 0 \\ -y+z &= 0 \\ y+(1+\alpha)z &= 0 \end{cases}$ ssi $\begin{cases} x+z+\alpha z &= 0 \\ y &= z \\ (2+\alpha)z &= 0 \end{cases}$ avec $L_3 \leftarrow L_3 + L_2$

Si $\alpha \neq -2$ alors $z = 0$ puis $x = y = 0$. La solution est le point $(0,0,0)$.
Si $\alpha = -2$ alors $z \in \mathbb{R}$ est libre et $x = y = z$. Les solutions sont la droite dirigée par $(1,1,1)$ et qui passe par $(0,0,0)$.
Si $\alpha = 1$ alors on le plan d'équation $x+y+z = 0$. C'est à dire normal au vecteur $(1,1,1)$ et qui passe par $(0,0,0)$.

Exercice 12

Indication :

On se ramène à des congruences sur les angles avec les règles :

$$\cos a = \cos b \text{ ssi } (a \equiv b\,[2\pi] \text{ ou } a \equiv -b\,[2\pi]).$$
$$\sin a = \sin b \text{ ssi } (a \equiv b\,[2\pi] \text{ ou } a \equiv \pi - b\,[2\pi]).$$
$$\tan a = \tan b \text{ ssi } a \equiv b\,[\pi].$$

Solution :

a) On a $\cos(2x - \pi/3) = \sin(x + 3\pi/4) = \cos(\pi/2 - x - 3\pi/4) = \cos(-x - \pi/4)$
ssi $2x - \pi/3 \equiv -x - \pi/4\,[2\pi]$ ou $2x - \pi/3 \equiv x + \pi/4\,[2\pi]$

ssi $3x \equiv \pi/12\,[2\pi]$ ou $x \equiv 7\pi/12\,[2\pi]$
ssi $x \in \left\{\dfrac{\pi}{36}, \dfrac{25\pi}{36}, \dfrac{49\pi}{36}, \dfrac{7\pi}{12}\right\} + 2\pi\mathbb{Z}$.

b) On a $\tan(4x) = \sqrt{3} = \tan(\pi/3)$
ssi $4x \equiv \dfrac{\pi}{3}[2\pi]$
ssi $x \equiv \dfrac{\pi}{12}[\pi/2]$
ssi $x \in \left\{\dfrac{\pi}{12}, \dfrac{7\pi}{12}, \dfrac{13\pi}{12}, \dfrac{19\pi}{12}\right\} + 2\pi\mathbb{Z}$.

c) On a $\cos(5x) = 0 = \cos(\pi/2)$
ssi $5x \equiv \dfrac{\pi}{2}[2\pi]$ ou $5x \equiv -\dfrac{\pi}{2}[2\pi]$
ssi $5x \equiv \dfrac{\pi}{2}[\pi]$
ssi $x \equiv \dfrac{\pi}{10}[\pi/5]$
ssi $x \in \left\{\dfrac{(2k+1)\pi}{10} \text{ pour } 0 \leq k \leq 9\right\} + 2\pi\mathbb{Z}$.

d) On a $\cos(x + \pi/2) \geq \dfrac{1}{2}$
ssi $x + \pi/2 \in [-\pi/3, \pi/3] + 2\pi\mathbb{Z}$
ssi $x \in [-\pi/3 - \pi/2, \pi/3 - \pi/2] + 2\pi\mathbb{Z}$
ssi $x \in [-5\pi/6, -\pi/6] + 2\pi\mathbb{Z} = [7\pi/6, 11\pi/6] + 2\pi\mathbb{Z}$.

e) On a $\cos(2x - \pi/3) = \sin(x + 3\pi/4)$
ssi $\cos(2x - \pi/3) = \cos(\pi/2 - [x + 3\pi/4])$ car $\sin(\theta) = \cos(\pi/2 - \theta)$
ssi $\cos(2x - \pi/3) = \cos(x + \pi/4)$
ssi $2x - \pi/3 \equiv x + \pi/4[2\pi]$ ou $2x - \pi/3 \equiv -x - \pi/4[2\pi]$
ssi $x \equiv \dfrac{7\pi}{12}[2\pi]$ ou $3x \equiv \dfrac{\pi}{12}[2\pi]$
ssi $x \in \left\{\dfrac{7\pi}{12}, \dfrac{\pi}{36}, \dfrac{25\pi}{36}, \dfrac{49\pi}{36}\right\}$.

f) On note $C = \cos x$. On a $\sin^4 x = (1 - C^2)^2$
Donc $\cos^4 x + \sin^4 x = 1$ ssi $C^4 + (1 - C^2)^2 = 1$ ssi $2C^4 - 2C^2 = 0$ ssi $C \in \{0, 1, -1\}$
ssi $x \in \{0, \pi/2, \pi, 3\pi/2\} + 2\pi\mathbb{Z}$.

g) On factorise $\sin x + \sin 3x = 2\sin(2x)\cos x$.
Donc $\sin x + \sin 3x = 0$ ssi $\cos(x) = 0$ ou $\sin(2x) = 0$
ssi $x \in \{\pi/2, 3\pi/2\} + 2\pi\mathbb{Z}$ ou $2x \in \{0, \pi\} + 2\pi\mathbb{Z}$
ssi $x \in \{0, \pi/2, \pi, 3\pi/2\} + 2\pi\mathbb{Z}$.

h) On a $\sin x + \sin 2x + \sin 3x = \sin 2x[2\cos x + 1]$ avec la même factorisation que l'exemple précédent.
Donc $\sin x + \sin 2x + \sin 3x = 0$ ssi $\sin 2x = 0$ ou $\cos x = -1/2$
ssi $x \in \{0, \pi/2, \pi, 3\pi/2\} + 2\pi\mathbb{Z}$ ou $x \in \{2\pi/3, 4\pi/3\} + 2\pi\mathbb{Z}$.

Exercice 13

Indication :

On étudie le signe de la dérivée en factorisant l'expression trigonométrique.

Solution :

La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$. Soit $x \in \mathbb{R}$.
On a $f'(x) = -5\sin(5x) - 5\sin(x) = -5\,(\sin(5x) + \sin(x))$

$= -10\sin\left(\frac{5x+x}{2}\right)\cos\left(\frac{5x-x}{2}\right)$ par formule de factorisation
$= -10\sin(3x)\sin(2x)$.
La fonction f est 2π périodique (i.e. $f(x+2\pi) = f(x)$) et paire (i.e. $f(-x) = f(x)$).
On peut réduire l'étude sur $[0, \pi]$ avec le tableau de signe :

x	0		$\frac{\pi}{3}$		$\frac{\pi}{2}$		$\frac{2\pi}{3}$		π
$\sin(3x)$	0	$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	0
$\sin(2x)$	0	$+$		$+$	0	$-$		$-$	0
$f'(x)$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0

Donc la fonction est croissante sur
$([-2\pi/3, -\pi/2] \cup [-\pi/3, 0] \cup [\pi/3, \pi/2] \cup [2\pi/3, \pi]) + 2\pi\mathbb{Z}$
et décroissante sinon.

Exercice 14

Indication :

a) Vérifier la définition de périodique et impaire.

b) Deux méthodes :

1. Utiliser les propriétés du **a)** .
2. Faire le calcul explicite à l'aide d'une linéarisation.

Solution :

a) Soit $x \in \mathbb{R}$. On a $f(x+\pi) = \cos(x+\pi)\sin(3x+3\pi)$
$= -\cos(x)\sin(3x+\pi) = \cos(x)\sin(3x) = f(x)$.
Et d'autre part $f(-x) = \cos(-x)\sin(-3x) = -\cos(x)\sin(3x) = -f(x)$.
Donc f est $\pi-$périodique et impaire.

b) On linéarise l'expression de f : $\cos(x)\sin(3x) = \frac{1}{2}\left(\sin(3x+x) + \sin(3x-x)\right)$.
Ainsi $\int_0^{2\pi} f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \sin(4x) + \sin(2x)\,\mathrm{d}x$
$= \frac{1}{2}\left[-\frac{\cos(4x)}{4} - \frac{\cos(2x)}{2}\right]_0^{2\pi} = 0.$