# TD4 : Calcul de primitives et Équations différentielle

## 4.1 Calcul de primitives

**Exercice 1** ($\star$) Déterminer les primitives des fonctions suivantes :

**a)** $a(x) = \sin\left(2x - \frac{\pi}{6}\right)$
**b)** $b(x) = \frac{1}{\cos^2\left(x+\frac{\pi}{2}\right)}$
**c)** $c(x) = \sin^2(x)$
**d)** $d(x) = \cos^2(x)$
**e)** $e(x) = \frac{1}{(2x+5)^3}$
**f)** $f(x) = \tan^2(x)$

**Exercice 2** ($\star$) Calculer les intégrales suivantes à l'aide d'intégration par parties :

**a)** $\int_0^1 t^2 e^t \,\mathrm{d}t$
**b)** $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t \ln(1+\cos t)\,\mathrm{d}t$
**c)** $\int_1^2 \frac{\ln(1+t)}{t^2}\,\mathrm{d}t$
**d)** $\int_0^{\pi} te^t \sin(2t)\,\mathrm{d}t$

**Exercice 3** ($\star$) A l'aide d'une intégration par parties, déterminer les primitives des fonctions :

**a)** $a(x) = (x+1)e^{-x}$
**b)** $b(x) = (x^2+x+1)e^{2x}$
**c)** $c(x) = e^x \sin x$
**d)** $d(x) = x\mathrm{Arctan}\, x$
**e)** $e(x) = \ln^2 x$
**f)** $f(x) = \sqrt{x}\ln x$
**g)** $g(x) = e^x \cos^2 x$
**h)** $h(x) = \sin(\ln x)$

**Exercice 4** ($\star\star$) A l'aide du changement de variables proposé, calculer les primitives des fonctions :

**a)** $a(x) = \frac{1}{x\sqrt{1+x}}$ avec $u = \sqrt{1+x}$
**b)** $b(x) = x^{-1/2}2^{\sqrt{x}}$ avec $u = \sqrt{x}$
**c)** $c(x) = \frac{\sin x}{1-\cos x}$ avec $u = \cos x$
**d)** $d(x) = \frac{\cos^3 x}{\sin^2 x}$ avec $u = \sin x$
**e)** $e(x) = \frac{2+\ln x}{x(1+\ln x)^3}$ avec $u = 1+\ln x$
**f)** $f(x) = \frac{e^{2x}}{\sqrt{e^x+1}}$ avec $u = \sqrt{e^x+1}$
**g)** $g(x) = \frac{\mathrm{sh}^3 x}{3+\mathrm{ch}\, x}$ avec $u = \mathrm{ch}\, x$

**Exercice 5** ($\star\star$) Soit $I = \int_0^{\pi} \frac{t\sin(t)dt}{3+\sin^2 t}$. En utilisant le changement de variable $u = \pi - t$, déterminer la valeur de $I$.

**Exercice 6** ($\star$) Décomposer les fractions rationnelles et calculer une primitive :

**a)** $a(x) = \frac{2x+3}{x^2-4}$
**b)** $b(x) = \frac{3x+7}{x^2-3x+2}$
**c)** $c(x) = \frac{x^2+1}{x^2+x+1}$
**d)** $d(x) = \frac{x-1}{x^2+3x+2}$
**e)** $e(x) = \frac{x^2}{x^2-x-2}$
**f)** $f(x) = \frac{2x-5}{x(x-1)(x+1)}$

## 4.2 Equations différentielles

**Exercice 7** ($\star\star$) Résoudre les équations différentielles suivantes :

**a)** $(1+x)y' - (2+x)y = 2x$
**b)** $xy' - y = (x^2+x+1)^3$
**c)** $y' - 3y = x^2$
**d)** $xy' - 2y = \frac{2x^2(1+2x^2)}{x^2+1}$
**e)** $2y' + 2y\cos x = \sin x$
**f)** $y + y' = 2xe^{-x} + x^2$

**Exercice 8** ($\star\star$) Résoudre les équations différentielles du second ordre suivantes :

**a)** $y'' - 4y' + 3y = e^x$
**b)** $y'' - 4y' + 3y = e^x \cos x$
**c)** $y'' - 2y' + 5y = e^x \sin 2x$
**d)** $y'' + 2y' + 2y = x^2 sh\, x \cos x$
**e)** $y'' + y' + y = x\cos x$
**f)** $y'' - 2y' + y = ch\, x$
**g)** $y'' - 4y' + 5y = e^{2x}\cos x + e^x \sin 2x$
**h)** $y'' - 2y' + y = e^x(x^2+x+1)$
**i)** $y'' - 6y' + 13y = e^{3x}(x\cos 2x + \sin 2x)$
**j)** $y'' - 2y' + 2y = xe^x \sin 2x$
**k)** $y'' - 5y' + 6y = (x^2+1)e^{2x}$
**l)** $y'' - 3y' + 2y = xch^2 x + x^2\cos x + xe^{3x}\sin x$
**m)** $y'' - 3y' + 2y = -e^x(x+1)/x^2$
**n)** $y'' + y = 1/\cos x$