TD3 : Fonctions d'une variable réelle

3.1 Fonctions de référence

Exercice 1 ($\star$) Résoudre les équations suivantes dans $\mathbb{R}$:

a) $2\ln(x+1)+\ln(3x+5)+\ln(2)=\ln(6x+1)+2\ln(x-2)$.

b) $e^{2x}-2e^{x}-3=0$.

c) $5^{x}-5^{x+1}+2^{3x-1}=0$.

d) $\sqrt{x+2}+\sqrt{x+3}+\sqrt{x+6}=3$.

e) $\begin{cases} x+y & =520 \\ \log_{10}x+\log_{10}y & =4 \end{cases}$

f) $\begin{cases} 2^{x}+2^{y}+2^{z} & =15 \\ e^{x}e^{y}e^{z} & =e^{6} \\ \ln(3^{x}3^{y})=z\ln(3) & \end{cases}$.

Exercice 2 ($\star\star$) Étudier les fonctions suivantes :

a) $x\mapsto \frac{x}{2}+\ln\left(\frac{x-1}{3x-4}\right)$.

b) $x\mapsto \frac{x^2-x}{x-3}$.

c) $x\mapsto \frac{1}{x^2}-\frac{8}{x+1}$.

d) $x\mapsto \ln(x^2+1)$.

e) $x\mapsto x\ln\left(e+\frac{1}{x}\right)$.

f) $x\mapsto \sqrt{\frac{x^3}{2-x}}$.

Exercice 3 ($\star$) Démontrer les formules suivantes sur les fonctions hyperboliques :

a) $\mathrm{ch}^2 x-\mathrm{sh}^2 x=1$.

b) $\mathrm{ch}\,(x+y)=\mathrm{ch}\,x\mathrm{ch}\,y+\mathrm{sh}\,x\mathrm{sh}\,y$.

c) $\mathrm{sh}\,(x+y)=\mathrm{ch}\,x\mathrm{sh}\,y+\mathrm{ch}\,x\mathrm{sh}\,y$.

d) $\mathrm{th}\,(x+y)=\frac{\mathrm{th}\,x+\mathrm{th}\,y}{1+\mathrm{th}\,x\mathrm{th}\,y}$.

e) $\mathrm{ch}\,(2x)=2\mathrm{ch}^2 x-1=1+2\mathrm{sh}^2 x$.

f) $\mathrm{sh}\,(2x)=2\mathrm{sh}\,x\mathrm{ch}\,x$.

Exercice 4 ($\star\star$) Résoudre les équations suivantes :

a) $\mathrm{Arcsin}\,x-\mathrm{Arccos}\,x=2\mathrm{Arctan}\,2x-\frac{\pi}{2}$

b) $\mathrm{Arctan}\,2x+\mathrm{Arctan}\,x=\frac{\pi}{4}$

c) $\mathrm{Arcsin}\,\frac{4}{5}+\mathrm{Arcsin}\,\frac{5}{13}=\mathrm{Arcsin}\,x$

d) $\sin\left(2\mathrm{Arccos}\,\left(\mathrm{cotan}(2\mathrm{Arctan}\,x)\right)\right)=0$

3.2 Calcul de dérivées

Exercice 5 ($\star\star$) Calculer les dérivées des fonctions suivantes (on précisera le ou les intervalles de validité du calcul) :

a) $A(x)=\mathrm{Arctan}\,(\mathrm{sh}\,x)$

b) $B(x)=\ln(\mathrm{sh}\,x)$

c) $C(x)=\mathrm{Arccos}\,\frac{1}{1+x^2}$

d) $D(x)=\sin(\sqrt{\ln x})$

e) $E(x)=e^{x}\ln(\sin x)$

f) $F(x)=\mathrm{Arccos}\,(\ln x)$

g) $G(x)=x^{\mathrm{Arcsin}\,x}$

h) $H(x)=\ln\frac{\sqrt{1+\sin x}}{\sqrt{1-\sin x}}$

i) $I(x)=\mathrm{Arctan}\,\frac{\sqrt{1-\cos x}}{\sqrt{1+\cos x}}$

Exercice 6 ($\star$) Montrer l'identité pour tout $x\in\mathbb{R}$, $2\mathrm{Arctan}\,(\mathrm{th}\,x)=\mathrm{Arctan}\,(\mathrm{sh}\,2x)$.

Exercice 7 ($\star$) Soit n un entier naturel. Calculer la dérivée n-ième de $f_n : x\mapsto x^n(1+x)^n$ de deux manières. En déduire la formule $\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}^2=\binom{2n}{n}$.

Exercice 8 ($\star\star$) Calculer les dérivées d'ordre n, pour tout entier $n\in\mathbb{N}$, des fonctions f et g définies par :

$$f(x)=\frac{2x}{x^2-1} \quad \text{et} \quad g(x)=\frac{1}{1+x^2}.$$