TD2 : Les nombres complexes

2.1 Calcul élémentaire

Exercice 1 ($\star$) Mettre sous forme algébrique les nombres complexes suivants :

$$\frac{5+2i}{1-2i} \quad , \quad \frac{7-3i}{1+3i} \quad , \quad \frac{a}{a+ib} \quad , \quad \frac{a+ib}{b+ia}, \text{ pour } a, b \in \mathbb{R}.$$

Exercice 2 ($\star$) Mettre sous forme trigonométrique les nombres complexes suivants :

$$-3\,,\ -1+i\sqrt{3}\,,\ 2-2i\,,\ \frac{-1+i\sqrt{3}}{\sqrt{3}+i}\,,\ \left(\frac{1+i\sqrt{3}}{1-i}\right)^{20}$$

$$(1+i)^{2014},\ \frac{1+i\tan\alpha}{1-i\tan\alpha},\ e^{it}+e^{is}\,,\ \frac{e^{it}+e^{is}}{e^{it}-e^{is}}.$$

Exercice 3 ($\star\star$) Soient $\theta \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$. Calculer les sommes suivantes :

a) $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cos(k\theta)$ **b)** $\sum_{k=0}^{n} \frac{\sin(k\theta)}{\cos^k(\theta)}$ **c)** $\sum_{k=0}^{n} \binom{2n}{2k} (-1)^k 3^k$

2.2 Application à la trigonométrie

Exercice 4 ($\star$) Résoudre les équations trigonométriques suivantes :

a) $\sqrt{3}\cos x + \sin x = 1.$

b) $\cos x + \sin x \geq -1.$

c) $3\cos x - \sqrt{3}\sin x = \sqrt{6}.$

d) $2\sin x . \cos x + \sqrt{3}\cos 2x = 0.$

Exercice 5 ($\star$) Linéariser les fonctions suivantes, c'est-à-dire en fonction de $\cos(kx)$ et $\sin(kx)$ avec $k \in \mathbb{N}^*$:

a) $A(x) = \sin^3 x$

b) $B(x) = \cos^3 x$

c) $C(x) = \sin x \cos^2 x$

d) $D(x) = \cos x \sin^2 x$

Exercice 6 ($\star\star$) Calcul de $\cos(\pi/5)$ à l'aide de radicaux.

a) Pour $x \in \mathbb{R}$, montrer que $\cos(5x) = 16\cos^5 x - 20\cos^3 x + 5\cos x$.

b) En déduire que $\cos(\pi/10)$ est une racine du polynôme $16X^4 - 20X^2 + 5$.

c) En déduire la valeur de $\cos^2(\pi/10)$ à l'aide de radicaux.

d) En déduire que $\cos(\pi/5) = \frac{1+\sqrt{5}}{4}$ puis déterminer une expression de $\tan(\pi/5)$.

Exercice 7 ($\star$)

1. Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$. On note φ l'argument de $a+i$ dans $]-\pi, \pi]$.
   Montrer que $\varphi = \text{Arctan}\,(1/a)$. Que dire si $a \in \mathbb{R}_-^*$?
2. En déduire la valeur de $\text{Arctan}\,(1/2) + \text{Arctan}\,(1/3)$.

2.3 Résolution d'équations

Exercice 8 ($\star$) Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

a) $z^2 - \sqrt{3}z - i = 0$

b) $z^2 - (2+i)z + (i+7) = 0$

c) $z^2 - iz - (1+i) = 0$

d) $iz^2 + (1-5i)z + 6i - 2 = 0$

e) $(2+i)z^2 - (5-i)z + (2-2i) = 0$

f) $z^2 + (2-4i)z - (3+4i) = 0.$

Exercice 9 ($\star\star$) Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

a) $z\bar{z} + 3(z - \bar{z}) = 4 - 3i$

b) $(1 - i)z - 3i\bar{z} = 1 + 4i$

c) $|z| = z + \bar{z}$

d) $|z| = \left|\frac{1}{z}\right| = |1 - z|$.

Exercice 10 ($\star$) Résoudre les équations pour $z \in \mathbb{C}$:

a) $z^6 = 1 - i$.

b) $(z + 1)^8 = (1 + i\sqrt{3})^4$.

c) $z^5 = \frac{i\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}+i}$.

d) $z^2 = -40 + 42i$.

e) $z^3 + 1 = 0$

f) $z^6 - z^3 + 1 = 0$.

Exercice 11 ($\star\star$) Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

a) $z^6 + (7 - i)z^3 = 8 + 8i$

b) $(z - 1)^7 = (z + 1)^7$

c) $(2z + 1)^4 = (z - 1)^4$

d) $z^n = \frac{1+i\tan(\varphi)}{1-i\tan(\varphi)}$

e) $\left(\frac{z+i}{z-i}\right)^n = \frac{1+i}{1-i}$

f) $z^{2n} - z^n + 1 - i = 0$

2.4 Géométrie

Exercice 12 ($\star\star$) Pour $z \in \mathbb{C}$, montrer les équivalences suivantes :

a) $\frac{z+i}{z-i} \in \mathbb{U}$ ssi $z \in \mathbb{R}$.

b) $\frac{1-z}{1-iz} \in \mathbb{R}$ ssi z parcourt un cercle (à préciser).

c) $\frac{1-z}{1-iz} \in i\mathbb{R}$ ssi z parcourt une droite (à préciser).

Exercice 13 ($\star\star$) Déterminer les complexes $z \in \mathbb{C}$ tels que :

a) les points d'affixes respectives z, i et iz soient alignés.

b) les points d'affixes respectives $1, z, 1/z$ et $1 - z$ soient alignés.

Exercice 14 ($\star\star$) On considère $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, z \mapsto z^2 + z + 1$.

a) Trouver les points invariants càd : $z \in \mathbb{C}$ tels que $f(z) = z$.

b) Trouver les points d'image réels càd : $z \in \mathbb{C}$ tels que $f(z) \in \mathbb{R}$.

c) Trouver les points alignés avec leurs images et le point A d'affixe 1.