TD2 : Les nombres complexes - Corrigé

2.1 Calcul élémentaire

Exercice 1

Indication :

On multiplie par le conjugué du dénominateur pour faire apparaître $z\bar{z} = |z|^2$ qui est un réel strictement positif.

Solution :

a) $\dfrac{5+2i}{1-2i} = \dfrac{(5+2i)(1+2i)}{1+4} = \dfrac{1}{5} + \dfrac{12}{5}i.$

b) $\dfrac{7-3i}{1+3i} = \dfrac{(7-3i)(1-3i)}{1+9} = -\dfrac{1}{5} - \dfrac{12}{5}i.$

c) $\dfrac{a}{a+ib} = \dfrac{a(a-ib)}{a^2+b^2} = \dfrac{a^2}{a^2+b^2} - \dfrac{ab}{a^2+b^2}i.$

d) $\dfrac{a+ib}{b+ia} = \dfrac{(a+ib)(b-ia)}{a^2+b^2} = \dfrac{2ab}{a^2+b^2} + \dfrac{b^2-a^2}{a^2+b^2}i.$

Exercice 2

Indication :

Pour écrire $a + ib = \rho e^{i\theta}$, on commence par calculer le module avec $\rho = \sqrt{a^2+b^2}$.

Puis on détermine l'argument en résolvant le système $\begin{cases} \cos(\theta) &= \dfrac{a}{\rho} \\ \sin(\theta) &= \dfrac{b}{\rho} \end{cases}$

On utilise également la nature multiplicative de l'écriture : $\rho_1 e^{i\theta_1}\rho_2 e^{i\theta_2} = (\rho_1\rho_2)e^{i(\theta_1+\theta_2)}$.

La formule du produit s'étend aussi naturellement au quotient et à la puissance.

Solution :

a) $-3 = 3e^{i\pi}$.

b) $-1 + i\sqrt{3} = \sqrt{1+3}\left(-1/2 + i\sqrt{3}/2\right) = 2e^{2i\pi/3}$.

c) $2 - 2i = 2\sqrt{2}\left(\sqrt{2}/2 - i\sqrt{2}/2\right) = 2\sqrt{2}e^{-i\pi/4}$.

d) $\dfrac{-1+i\sqrt{3}}{\sqrt{3}+i} = \dfrac{2e^{2i\pi/3}}{2e^{i\pi/6}} = e^{i\pi/2}$.

e) $\left(\dfrac{1+i\sqrt{3}}{1-i}\right)^{20} = \left(\dfrac{2e^{i\pi/3}}{\sqrt{2}e^{-i\pi/4}}\right)^{20} = \left(\sqrt{2}e^{7i\pi/12}\right)^{20} = 2^{10}e^{35i\pi/3} = 2^{10}e^{-i\pi/3}$ car $35 = -1[6]$.

f) $(1+i)^{2021} = (\sqrt{2}e^{i\pi/4})^{2021} = 2^{1010}\sqrt{2}e^{2021i\pi/4} = 2^{1010}\sqrt{2}e^{5i\pi/4}$ car $2021 = 5[8]$.

g) $\dfrac{1+i\tan\alpha}{1-i\tan\alpha} = \dfrac{\cos\alpha + i\sin\alpha}{\cos\alpha - i\sin\alpha} = \dfrac{e^{i\alpha}}{e^{-i\alpha}} = e^{2i\alpha}$.

h) $e^{it} + e^{is} = e^{i(t+s)/2}2\cos[(s-t)/2]$.

i) $\dfrac{e^{it}+e^{is}}{e^{it}-e^{is}} = \dfrac{e^{i(t+s)/2}2\cos[(s-t)/2]}{e^{i(t+s)/2}2i\sin[(s-t)/2]} = \dfrac{1}{\tan[(s-t)/2]}e^{-i\pi/2}$.

Exercice 3

Indication :

On utilise la linéarité de la partie réelle ou de la partie imaginaire afin de réaliser un calcul de somme sur $\mathbb{C}$.

$$\mathrm{Re}\left(\sum_{k=0}^{n}\lambda_k z_k\right) = \sum_{k=0}^{n}\lambda_k \mathrm{Re}(z_k)$$
$$\mathrm{Im}\left(\sum_{k=0}^{n}\lambda_k z_k\right) = \sum_{k=0}^{n}\lambda_k \mathrm{Im}(z_k)$$

avec $\lambda_k \in \mathbb{R}$ des réels et $z_k \in \mathbb{C}$ des complexes.

<u>*Solution*</u> *:*

a) On a : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\cos(k\theta) = \mathrm{Re}\left[\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}e^{ik\theta}\right]$
$= \mathrm{Re}\left[(1+e^{i\theta})^n\right]$ à l'aide de la formule du binôme
$= \mathrm{Re}[2e^{i\theta/2}\cos(\theta/2)]^n$ à l'aide l'arc moitié
$= 2^n\cos^n(\theta/2)\cos(n\theta/2)$.

b) On a : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{\sin(k\theta)}{\cos^k(\theta)} = \mathrm{Im}\left[\sum_{k=0}^{n}\frac{e^{ik\theta}}{\cos^k\theta}\right] = \mathrm{Im}\left[\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{e^{i\theta}}{\cos\theta}\right)^k\right]$
$= \mathrm{Im}\dfrac{1-\left(\frac{e^{i\theta}}{\cos\theta}\right)^{n+1}}{1-\left(\frac{e^{i\theta}}{\cos\theta}\right)}$ avec la formule de somme des puissances
$= \dfrac{1}{\cos^n\theta}\mathrm{Im}\dfrac{\cos^{n+1}\theta - e^{i(n+1)\theta}}{\cos\theta - e^{i\theta}}$ car $\dfrac{1}{\cos^n\theta} \in \mathbb{R}$ est réel
$= \dfrac{1}{\cos^n\theta}\mathrm{Im}\dfrac{\cos^{n+1}\theta - e^{i(n+1)\theta}}{-i\sin\theta}$ avec $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$
$= \dfrac{\cos\theta}{\sin\theta} - \dfrac{\cos[(n+1)\theta]}{\cos^n\theta\sin\theta}$.

c) On a : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{2n}{2k}(-1)^k 3^k = \sum_{l\text{ pair}}\binom{2n}{l}(-1)^{l/2}\sqrt{3}^l$ avec $l = 2k$
$= \mathrm{Re}\displaystyle\sum_{l=0}^{2n}\binom{2n}{l}i^l\sqrt{3}^l$ car $i^l \in \mathbb{R}$ ssi l est pair
$= \mathrm{Re}(1+\sqrt{3}i)^{2n}$ avec la formule du binôme de Newton
$= \mathrm{Re}(2^{2n}e^{2in\pi/3})$ sous la forme exponentielle
$= 2^{2n}\cos(2n\pi/3)$.

2.2 Application à la trigonométrie

Exercice 4

<u>*Indication*</u> *:*

On peut factoriser $a\cos x + b\sin x = A\cos(x-\varphi)$ avec $a + ib = Ae^{i\varphi}$.

<u>*Exemple*</u> *:*

Pour factoriser $\cos x + \sqrt{3}\sin x$, on introduit $z = 1 + i\sqrt{3}$ sous forme algébrique.
On détermine sa forme exponentielle $z = 2e^{i\pi/3}$.
On écrit alors $\cos x + \sqrt{3}\sin x = 2\cos(\pi/3)\cos(x) + 2\sin(\pi/3)\sin(x) = 2\cos(x-\pi/3)$.

<u>*Solution*</u> *:*

a) On a $\sqrt{3}+i = 2e^{i\pi/6}$. Donc $\sqrt{3}\cos(x)+\sin(x) = 2\cos(x-\pi/6)$.
Ainsi $\sqrt{3}\cos(x)+\sin(x) = 1$ ssi $\cos(x-\pi/6) = \dfrac{1}{2} = \cos(\pi/3)$
ssi $x - \dfrac{\pi}{6} \equiv \dfrac{\pi}{3}[2\pi]$ ou $x - \dfrac{\pi}{6} \equiv -\dfrac{\pi}{3}[2\pi]$
ssi $x \in \left\{\dfrac{\pi}{2}, -\dfrac{\pi}{6}\right\} + 2\pi\mathbb{Z}$.

b) On a $1+i = \sqrt{2}e^{i\pi/4}$. Donc $\cos x + \sin x = \sqrt{2}\cos(x-\pi/4)$.
Ainsi $\cos x + \sin x \geq -1$ ssi $\cos(x-\pi/4) \geq -1/2$
ssi $x - \dfrac{\pi}{4} \in \left[\dfrac{2\pi}{3}, \dfrac{4\pi}{3}\right] + 2\pi\mathbb{Z}$
ssi $x \in \left[\dfrac{2\pi}{3}+\dfrac{\pi}{4}, \dfrac{4\pi}{3}+\dfrac{\pi}{4}\right] + 2\pi\mathbb{Z}$

ssi $x \in \left[\frac{11\pi}{12}, \frac{19\pi}{12}\right] + 2\pi\mathbb{Z}$.

c) On écrit $3 + i\sqrt{3} = \sqrt{12}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}\right) = 2\sqrt{3}e^{i\pi/6}$.

Donc $3\cos x - \sqrt{3}\sin x = 2\sqrt{3}\,(\cos(\pi/6)\cos x - \sin(\pi/6)\sin x) = \sqrt{6}$
ssi $\cos(x + \pi/6) = \frac{\sqrt{2}}{2} = \cos(\pi/4)$ ssi $x + \pi/6 \in \{\pi/4, -\pi/4\} + 2\pi\mathbb{Z}$
ssi $x \in \{\pi/12, -5\pi/12\} + 2\pi\mathbb{Z}$.

d) On a $2\sin x.\cos x + \sqrt{3}\cos 2x = \sin(2x) + \sqrt{3}\cos(2x)$.

De même, on a $\sqrt{3} + i = 2e^{i\pi/6}$.

Donc $2\sin x\cos x + \sqrt{3}\cos(2x) = 0$ ssi $2[\cos(\pi/6)\cos(2x) + \sin(\pi/6)\sin(2x)] = 0$
ssi $\cos(2x - \pi/6) = 0$ ssi $2x - \pi/6 \in \{\pi/2, -\pi/2\} + 2\pi\mathbb{Z}$
ssi $2x \in \{2\pi/3, -\pi/3\} + 2\pi\mathbb{Z}$ ssi $x \in \{\pi/3, -\pi/6, -2\pi/3, 5\pi/6\} + 2\pi\mathbb{Z}$.

Exercice 5

Indication :

Deux méthodes :

1. On peut utiliser successivement les formules de linéarisation d'un produit de deux termes.
2. On peut utiliser les formules d'Euler $\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$ et $\sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$ et développer la puissance.

Solution :

a) A l'aide des formules trigo :

On a $\sin^3 x = \sin x \frac{1 - \cos(2x)}{2}$
$= \frac{\sin x}{2} - \frac{\sin(x + 2x) + \sin(x - 2x)}{4}$
$= \frac{3}{4}\sin x - \frac{1}{4}\sin(3x)$.

A l'aide des formules d'Euler :

$\sin^3 x = \left(\frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}\right)^3 = \frac{1}{(2i)^3}(e^{3ix} - 3e^{ix} + 3e^{-x} - e^{-3ix})$
$= \frac{1}{(2i)^2}\frac{e^{3ix} - e^{-3ix}}{2i} + \frac{-3}{(2i)^2}\frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} = -\frac{1}{4}\sin(3x) + \frac{3}{4}\sin x$.

b) De même, on trouve $\cos^3(x) = \frac{1}{4}\cos(3x) + \frac{3}{4}\cos(x)$.

c) Puis $\sin x\cos^2 x = \frac{1}{2}\sin(2x)\cos x$
$= \frac{1}{4}[\sin(2x + x) + \sin(2x - x)] = \frac{1}{4}\sin(3x) + \frac{1}{4}\sin(x)$.

d) Et de même $\cos x\sin^2 x = -\frac{1}{4}\cos(3x) + \frac{1}{4}\cos(x)$.

Exercice 6

Indication :

a) Utilisation des formules d'addition.

b) Utiliser **a)** et partir de $\cos(\pi/2) = 0$.

c) Rechercher les racines du polynôme du second degré et sélectionner la valeur dans le bon quadrant.

d) Utiliser les formules d'arc double.

Solution :

a) On a $\cos(5x) = Re(\cos x + i\sin x)^5$
$= Re(\cos^5 x + 5i\cos^4 x\sin x - 10\cos^3 x\sin^2 x - 10i\cos^2 x\sin^3 x + 5\cos x\sin^4 x + i\sin^5 x)$
$= \cos^5 x - 10\cos^3 x\sin^2 x + 5\cos x\sin^4 x$

$= \cos^5 x - 10\cos^3 x(1-\cos^2 x) + 5\cos x(1-\cos^2 x)^2$
$= 16\cos^5 x - 20\cos^3 x + 5\cos x.$

b) On a $0 = \cos(\pi/2) = \cos(5.\pi/10)$
$= 16\cos^5(\pi/10) - 20\cos^3(\pi/10) + 5\cos(\pi/10)$
$= \big(16\cos^4(\pi/10) - 20\cos^2(\pi/10) + 5\big)\cos(\pi/10).$
Or $\cos(\pi/10) \neq 0$ donc $16\cos^4(\pi/10) - 20\cos^2(\pi/10) + 5 = 0$.

c) Ainsi $\cos^2(\pi/10)$ est racine du polynôme $16X^2 - 20X + 5$.
Les racines sont $\dfrac{5+\sqrt{5}}{8}$ et $\dfrac{5-\sqrt{5}}{8}$.
Pour différentier les racines, on remarque que $\cos^2(\pi/10) > \cos^2(\pi/6) = 3/4$ et $\dfrac{5-\sqrt{5}}{8} < \dfrac{5}{8} < \dfrac{3}{4}$. Donc on en déduit $\cos^2(\pi/10) = \dfrac{5+\sqrt{5}}{8}$.

d) On en déduit $\cos(\pi/5) = \cos(2.\pi/10) = 2\cos^2(\pi/10) - 1 = \dfrac{5+\sqrt{5}}{4} - 1 = \dfrac{1+\sqrt{5}}{4}$. Puis $\sin(\pi/5) = \sqrt{1-\cos^2(\pi/5)} = \dfrac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}$.
Et $1 + \tan^2(\pi/5) = \dfrac{1}{\cos^2(\pi/5)} = \dfrac{16}{6+2\sqrt{5}} = \dfrac{16(6-2\sqrt{5})}{36-20} = 6 - 2\sqrt{5}$.
Ainsi $\tan(\pi/5) = \sqrt{5-2\sqrt{5}}$.

Exercice 7

<u>*Indication*</u> *:*

a) La fonction Arctan $: \mathbb{R} \to]-\pi/2, \pi/2[$ est la réciproque de la fonction tangente restreinte.
On a $\tan\theta = x \Leftrightarrow \theta = \operatorname{Arctan} x$ lorsque $x \in \mathbb{R}$ et $-\dfrac{\pi}{2} < \theta < \dfrac{\pi}{2}$.

b) On utilise la formule sur les arguments $\operatorname{Arg}(z_1 z_2) \equiv \operatorname{Arg}(z_1)\operatorname{Arg}(z_2)[2\pi]$.

<u>*Solution*</u> *:*

a) On écrit $a + i = \rho e^{i\varphi}$. Ainsi $a = \rho\cos\varphi$ et $1 = \rho\sin\varphi$.
En particulier, si $a > 0$ alors $\cos\varphi = \dfrac{a}{\rho} > 0$ donc $-\dfrac{\pi}{2} < \varphi < \dfrac{\pi}{2}$.
On a $\tan\varphi = \dfrac{\sin\varphi}{\cos\varphi} = \dfrac{\rho\sin\varphi}{\rho\cos\varphi} = \dfrac{1}{a}$ donc $\varphi = \operatorname{Arctan}(1/a) \in]-\pi/2, \pi/2[$.
Dans le cas où $a < 0$, on a $\cos\varphi < 0$ et $\sin\varphi > 0$ donc $\varphi \in]\pi/2, \pi[$.
Ainsi $\tan(\varphi - \pi) = \tan\varphi = \dfrac{1}{a}$ montre que $\varphi - \pi = \operatorname{Arctan}(1/a)$ car $\varphi - \pi \in]-\pi/2, \pi/2[$.
En conclusion, $\varphi = \begin{cases} \operatorname{Arctan}(1/a) \text{ si } a > 0 \\ \operatorname{Arctan}(1/a) + \pi \text{ si } a < 0 \end{cases}$.

b) On a $\operatorname{Arctan}(1/2) + \operatorname{Arctan}(1/3) = \operatorname{Arg}(2+i) + \operatorname{Arg}(3+i)$ d'après **a)**
$\equiv \operatorname{Arg}((2+i)(3+i))[2\pi]$ par opération
$\equiv \operatorname{Arg}(5+5i) \equiv \operatorname{Arg}(5e^{i\pi/4}) \equiv \dfrac{\pi}{4}[2\pi]$.
Ainsi $\operatorname{Arctan}(1/2) + \operatorname{Arctan}(1/3) = \dfrac{\pi}{4} + 2k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$.
Or $\operatorname{Arctan}(1/a) \in]-\pi/2, \pi/2[$ donc $\operatorname{Arctan}(1/2) + \operatorname{Arctan}(1/3) \in]-\pi, \pi[$ d'où $k = 0$.
En conclusion, on a établit que $\operatorname{Arctan}(1/2) + \operatorname{Arctan}(1/3) = \dfrac{\pi}{4}$.

2.3 Résolution d'équations

Exercice 8

<u>*Indication*</u> *:*

On utilise la méthode du discriminant $\Delta = b^2 - 4ac \in \mathbb{C}$.
Il faut désormais trouver les racines carrées $\delta \in \mathbb{C}$ telles que $\delta^2 = \Delta$.
Hormis les cas immédiats, on raisonne sur l'écriture trigonométrique :

$$\text{Si } \Delta = \rho e^{i\theta} \text{ alors } \delta = \pm\sqrt{\rho}e^{i\theta/2}.$$

Sinon on peut utiliser l'écriture algébrique :

$$\text{Si } \Delta = A + iB \text{ alors } \delta = x + iy \text{ vérifie le système } \begin{cases} x^2 - y^2 & = A \\ 2xy & = B \\ x^2 + y^2 & = \sqrt{A^2 + B^2} \end{cases}.$$

On applique alors la formule classique des racines $\dfrac{-b-\delta}{2a}$ et $\dfrac{-b+\delta}{2a}$.

<u>*Solution :*</u>

a) On calcul le discriminant de l'équation $z^2 - \sqrt{3}z - i = 0$.
$\Delta = (\sqrt{3})^2 - 4(-i) = 3 + 4i = (a + ib)^2$.
On résout le système $\begin{cases} a^2 - b^2 & = 3 \\ 2ab & = 4 \\ a^2 + b^2 & = \sqrt{9+16} = 5 \end{cases}$.
On obtient $ab = 2, a^2 = 4$ et $b^2 = 1$.
Donc $a + ib = \pm(2 + i)$ sont les racines carrées de Δ.
Les racines de l'équation sont $\dfrac{\sqrt{3}-(2+i)}{2} = \dfrac{\sqrt{3}-2}{2} - \dfrac{1}{2}i$ et $\dfrac{\sqrt{3}+2}{2} + \dfrac{1}{2}i$.

b) On calcul le discriminant de l'équation $z^2 - (2 + i)z + (i + 7) = 0$.
$\Delta = (2 + i)^2 - 4(i + 7) = -25 = (5i)^2$.
Les racines sont $\dfrac{(2+i)-5i}{2} = 1 - 2i$ et $\dfrac{(2+i)+5i}{2} = 1 + 3i$

c) Le discriminant de $z^2 - iz - (1 + i) = 0$ est $\Delta = i^2 + 4(1 + i) = 3 + 4i = (2 + i)^2$.(idem **a)**)
Puis les solutions sont $\dfrac{i-(2+i)}{2} = -1$ et $\dfrac{i+(2+i)}{2} = 1 + i$.

d) Le discriminant de $iz^2 + (1-5i)z + 6i - 2 = 0$ est $\Delta = (1-5i)^2 - 4i(6i-2) = -2i = 2e^{3i\pi/2}$.
Donc les racines de Δ sont $\delta = \pm\sqrt{2}e^{3i\pi/4} = \pm(-1 + i)$.
Les solutions de l'équation sont $\dfrac{-(1-5i)-(-1+i)}{2i} = 2$
et $\dfrac{-(1-5i)+(-1+i)}{2i} = \dfrac{3i-1}{i} = 3 + i$.

e) Le discriminant de $(2 + i)z^2 - (5 - i)z + (2 - 2i) = 0$
est $\Delta = (5 - i)^2 - 4(2 + i)(2 - 2i) = -2i = (-1 + i)^2$.(idem **d)**)
Puis les solutions sont $\dfrac{(5-i)-(-1+i)}{2(2+i)} = \dfrac{3-i}{2+i} = \dfrac{(3-i)(2-i)}{4+1} = 1 - i$
et $\dfrac{(5-i)+(-1+i)}{2(2+i)} = \dfrac{2}{2+i} = \dfrac{2(2-i)}{4+1} = \dfrac{4}{5} - \dfrac{2}{5}i$.

f) Le discriminant de $z^2 + (2 - 4i)z - (3 + 4i) = 0$ est $\Delta = (2 - 4i)^2 + 4(3 + 4i) = 0$.
Donc il existe une unique solution $-\dfrac{2-4i}{2} = -1 + 2i$.

Exercice 9

<u>*Indication :*</u>

Pour les équations non standards, on peut essayer suivant l'écriture algébrique $z = a + ib$ ou l'écriture trigonométrique $z = \rho e^{i\theta}$ afin de traduire l'équation sur $\mathbb{C}$ en deux équations à deux inconnues sur $\mathbb{R}$.

<u>*Solution :*</u>

a) On introduit $z = a + ib \in \mathbb{C}$ sous forme algébrique avec $a, b \in \mathbb{R}$.
On a $z\bar{z} + 3(z - \bar{z}) = 4 - 3i$ ssi $a^2 + b^2 + 6ib = 4 - 3i$ car $z\bar{z} = |z|^2$ et $z - \bar{z} = 2\mathrm{Im}z$

ssi $\begin{cases} a^2 + b^2 & = 4 \\ 6b & = -3 \end{cases}$ ssi $\begin{cases} a^2 & = 4 - 1/4 = 15/4 \\ b & = -1/2 \end{cases}$.

Donc les solutions sont $\dfrac{\sqrt{15} - i}{2}$ et $\dfrac{\sqrt{15} + i}{2}$.

b) On introduit $z = a + ib \in \mathbb{C}$ sous forme algébrique avec $a, b \in \mathbb{R}$.
On a : $(1 - i)z - 3i\bar{z} = 1 + 4i$ ssi $(1 - i)(a + ib) - 3i(a - ib) = 1 + 4i$
ssi $(a + b - 3b) + (b - a - 3a) = 1 + 4i$
ssi $\begin{cases} a - 2b & = 1 \\ -2a + b & = 4 \end{cases}$ ssi $\begin{cases} a - 2b & = 1 \\ -3b & = 6 \end{cases}$ avec $L_2 \leftarrow L_2 + 2L_1$
Donc l'unique solution est $z = a + ib = -3 - 2i$.

c) On remarque que $z = 0$ est une solution évidente puis on introduit $z = \rho e^{i\theta} \in \mathbb{C}^*$ sous forme trigonométrique.
On a $|z| = z + \bar{z}$ ssi $\rho = 2\rho\cos\theta$ car $z + \bar{z} = 2\mathrm{Re}z$
ssi $\cos\theta = 1/2$ car $\rho \neq 0$
ssi $\theta \in \{\pi/3, -\pi/3\} + 2\pi\mathbb{Z}$.
Les solutions sont donc les demi-droites
$D_+ = \{t(1 + i\sqrt{3})$ pour $t \geq 0\}$ et $D_- = \{t(1 - i\sqrt{3})$ pour $t \geq 0\}$.

d) Soit $z = \rho e^{i\theta} \in \mathbb{C} - \{0\}$. On a $|z| = \left|\dfrac{1}{z}\right| = |1 - z|$

ssi $\rho = \dfrac{1}{\rho} = |1 - \rho e^{i\theta}|$ ssi $\rho = 1$ et $|1 - e^{i\theta}| = 1$.
Or $|1 - e^{i\theta}| = |-2i\sin(\theta/2)e^{i\theta/2}| = 2|\sin(\theta/2)|$.
Donc $|1 - e^{i\theta}| = 1$ ssi $\sin(\theta/2) \in \{1/2, -1/2\}$
ssi $\theta/2 \in \{\pi/3, -\pi/3, 2\pi/3, -2\pi/3\} + 2\pi\mathbb{Z}$
ssi $\theta \in \{2\pi/3, -2\pi/3\} + 2\pi\mathbb{Z}$
Donc les solutions sont $j = e^{2i\pi/3} = \dfrac{-1 + i\sqrt{3}}{2}$ et $j^2 = \bar{j} = e^{-2i\pi/3} = \dfrac{-1 - i\sqrt{3}}{2}$.

Exercice 10

<u>*Indication*</u> *:*

Pour résoudre les équations du type "$z^n = constante$", on commence par écrire la constante sous la forme trigonométrique (Méthode Exercice 2).

Puis à l'aide des racines de l'unité $\mathbb{U}_n = \{e^{2ik\pi/n}$ pour $0 \leq k \leq n - 1\}$, on a :

$$z^n = \rho e^{i\theta} \text{ ssi } \exists\omega \in \mathbb{U}_n, z = \omega \sqrt[n]{\rho} e^{i\theta/n}$$

<u>*Solution*</u> *:*

a) On a $z^6 = 1 - i = \sqrt{2}e^{-i\pi/4}$
ssi $\exists\omega \in \mathbb{U}_6, z = \omega 2^{1/12}e^{-i\pi/24}$
Donc l'ensemble des solutions est
$\{2^{1/12}e^{47i\pi/24}; 2^{1/12}e^{7i\pi/24}; 2^{1/12}e^{15i\pi/24}; 2^{1/12}e^{23i\pi/24}; 2^{1/12}e^{31i\pi/24}; 2^{1/12}e^{39i\pi/24}\}$.

b) On a $(z + 1)^8 = (1 + i\sqrt{3})^4 = (2e^{i\pi/3})^4 = 2^4e^{4i\pi/3}$
ssi $\exists\omega \in \mathbb{U}_8, z + 1 = \omega 2^{4/8}e^{i\pi/6}$
ssi $\exists k \in [\![0, 7]\!], z = \sqrt{2}e^{i\pi/6 + ik\pi/4} - 1$.
Donc l'ensemble des solutions est
$\{\sqrt{2}e^{i\pi/6} - 1; \sqrt{2}e^{5i\pi/12} - 1; \sqrt{2}e^{2i\pi/3} - 1; \sqrt{2}e^{11i\pi/12} - 1;$
$\sqrt{2}e^{7i\pi/6} - 1; \sqrt{2}e^{17i\pi/12} - 1; \sqrt{2}e^{5i\pi/3} - 1; \sqrt{2}e^{23i\pi/12} - 1\}$.

c) On a $z^5 = \dfrac{i\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}+i} = \dfrac{2e^{i\pi/3}}{2e^{i\pi/6}} = e^{i\pi/6}$
ssi $\exists \omega \in \mathbb{U}_5, z = \omega e^{i\pi/30}$
L'ensemble des solutions est $\{e^{i\pi/30}; e^{13i\pi/30}; e^{5i\pi/6}; e^{37i\pi/30}; e^{49i\pi/30}\}$

d) On résout sous forme algébrique $z^2 = (a+ib)^2 = -40 + 42i$.
Donc on a le système $\begin{cases} a^2 - b^2 = -40 & \\ 2ab & = 42 \\ a^2 + b^2 & = \sqrt{40^2 + 42^2} = 58 \end{cases}$
Puis on trouve $a^2 = 9, b^2 = 49$ et $ab > 0$. Ainsi $z \in \{3 + 7i; -3 - 7i\}$.

e) On a $z^3 + 1 = 0$ ssi $z^3 = -1 = e^{i\pi}$
ssi $\exists \omega \in \mathbb{U}_3, z = \omega e^{i\pi/3}$.
Donc les solutions sont $\left\{-1, e^{i\pi/3}, e^{-i\pi/3}\right\}$.

f) L'équation $Z^2 - Z + 1 = 0$ admet pour solution $\left\{\dfrac{1+i\sqrt{3}}{2}; \dfrac{1-i\sqrt{3}}{2}\right\}$.
Donc $z^6 - z^3 + 1 = 0$ ssi $z^3 \in \{e^{i\pi/3}; e^{-\pi/3}\}$
ssi $\exists z \in \mathbb{U}_3, z = \omega e^{i\pi/9}$ ou $z = \omega e^{-i\pi/9}$.
Donc les six solutions sont $\{e^{i\pi/9}; e^{7i\pi/9}; e^{-5i\pi/9}; e^{-i\pi/9}; e^{-7i\pi/9}; e^{5i\pi/9}\}$.

Exercice 11

<u>*Indication*</u> *:*
On essaye d'adapter, suivant le contexte, les méthodes vu dans les Exercices 8, 9 et 10.
<u>*Solution*</u> *:*

a) On note $Z = z^3$ et on commence par résoudre $Z^2 + (7-i)Z - (8+8i) = 0$, équation du 2nd degré.
Le discriminant est $\Delta = (7-i)^2 + 4(8+8i) = 80 + 18i$.
On recherche $\delta = a + ib$ tel que $\delta^2 = \Delta$. Il vérifie $\begin{cases} a^2 - b^2 & = 80 \\ 2ab & = 18 \\ a^2 + b^2 & = 2\sqrt{40^2 + 81} = 2 \times 41 = 82 \end{cases}$
Donc $a^2 = 81$ et $b^2 = 1$ puis $\delta = \pm(9+i)$.
Ainsi $Z \in \left\{\dfrac{-(7-i)-(9+i)}{2}, \dfrac{-(7-i)+(9+i)}{2}\right\} = \{-8; 1+i\}$.
Puis l'équation $z^3 = Z = -8 = 8e^{i\pi}$ a 3 solutions $\{2e^{i\pi/3}, -2, 2e^{-i\pi/3}\}$.
Et l'équation $z^3 = Z = 1 + i = \sqrt{2}e^{i\pi/4}$ a 3 solutions $\{2^{1/6}e^{i\pi/12}, 2^{1/6}e^{9i\pi/12}, 2^{1/6}e^{17i\pi/12}\}$.
L'équation initiale a donc 6 solutions distinctes.

b) On a $(z-1)^7 = (z+1)^7$ ssi $\exists \omega \in \mathbb{U}_7, z - 1 = \omega(z+1)$
ssi $\exists \omega \in \mathbb{U}_7 - \{1\}, z = \dfrac{\omega + 1}{1 - \omega}$ avec $\omega \neq 1$
ssi $\exists k \in [\![1, 6]\!], z = -\dfrac{e^{2i\pi k/7} + 1}{e^{2i\pi k/7} - 1}$
$= -\dfrac{e^{i\pi k/7} 2\cos(k\pi/7)}{e^{i\pi k/7} 2i \sin(k\pi/7)} = \dfrac{i}{\tan(k\pi/7)}$
Puis on obtient les six solutions $\{\dfrac{i}{\tan(\pi/7)}, \dfrac{-i}{\tan(\pi/7)}, \dfrac{i}{\tan(2\pi/7)}, \dfrac{-i}{\tan(2\pi/7)}, \dfrac{i}{\tan(3\pi/7)}, \dfrac{-i}{\tan(3\pi/7)}\}$.

c) Pour $z \in \mathbb{C} - \{1\}$ on a $(2z+1)^4 = (z-1)^4$ ssi $\left(\dfrac{2z+1}{z-1}\right)^4 = 1$
ssi $\exists \omega \in \mathbb{U}_4, \dfrac{2z+1}{z-1} = \omega$

ssi $\exists \omega \in \{1,-1,i,-i\}, z = \dfrac{\omega+1}{\omega-2}$

Donc les solutions sont $\{-2, 0, \dfrac{i+1}{i-2}, \dfrac{-i+1}{-i-2}\} = \{-2, 0, -\dfrac{1}{5} - i\dfrac{3}{5}, -\dfrac{1}{5} + i\dfrac{3}{5}\}$.

d) Soit $z \in \mathbb{C}$, on a $z^n = \dfrac{1+i\tan(\varphi)}{1-i\tan(\varphi)} = \dfrac{e^{i\varphi}/\cos(\varphi)}{e^{-i\varphi}/\cos(-\varphi)} = e^{2i\alpha}$

ssi $z \in e^{2i\alpha/n}\mathbb{U}_n = \{\exp(\dfrac{2i(\alpha+k\pi)}{n})$ pour $k \in [\![0, n-1]\!]\}$.

e) Pour $z \in \mathbb{C}$, on a $\left(\dfrac{z+i}{z-i}\right)^n = \dfrac{1+i}{1-i} = \dfrac{\sqrt{2}e^{i\pi/4}}{\sqrt{2}e^{-i\pi/4}} = e^{i\pi/2}$.

ssi $\exists \omega \in \mathbb{U}_n, \dfrac{z+i}{z-i} = \omega e^{i\pi/2n}$

ssi $\exists \omega \in \mathbb{U}_n, z+i = \omega e^{i\pi/2n}(z-i)$

ssi $\exists k \in [\![0, n-1]\!], z(1-e^{2ik\pi/n+i\pi/2n}) = -i - ie^{2ik\pi/n+i\pi/2n}$

ssi $\exists k \in [\![0, n-1]\!], z = i\dfrac{1+e^{2ik\pi/n+i\pi/2n}}{e^{2ik\pi/n+i\pi/2n}-1}$

Puis avec l'arc moitiée, $i\dfrac{1+e^{2ik\pi/n+i\pi/2n}}{e^{2ik\pi/n+i\pi/2n}-1} = i\dfrac{2\cos(k\pi/n+\pi/4n)}{2i\sin(k\pi/n+\pi/4n)} = \dfrac{\cos[(4k+1)\pi/4n]}{\sin[(4k+1)\pi/4n]}$.

f) Soit $z \in \mathbb{C}$. On note $Z = z^n$. On a $z^{2n} - z^n + 1 - i = Z^2 - Z + 1 - i$ est une équation du 2nd degré.

Son discriminant est $\Delta = 1 - 4(1-i) = -3 + 4i = (1+2i)^2$.

Donc $Z \in \left\{\dfrac{1-(1+2i)}{2}, \dfrac{1+(1+2i)}{2}\right\} = \{-i, 1+i\}$.

Puis $z^n = -i = e^{-i\pi/2}$ ssi $z = \exp\left(\dfrac{(4k-1)i\pi}{2n}\right)$ pour $0 \leq k \leq n-1$.

Et $z^n = 1+i = \sqrt{2}e^{i\pi/4}$ ssi $z = \sqrt[2n]{2}\exp\left(\dfrac{(8k+1)i\pi}{4n}\right)$ pour $0 \leq k \leq n-1$.

2.4 Géométrie

Exercice 12

Solution :

a) On a $\dfrac{z+i}{z-i} \in \mathbb{U}$ ssi $\left|\dfrac{z+i}{z-i}\right| = 1$ ssi $|z+i| = |z-i|$

ssi $(z+i)\overline{(z+i)} = (z-i)\overline{(z-i)}$

ssi $(z+i)(\bar{z}-i) = (z-i)(\bar{z}+i)$

ssi $z\bar{z} - i(z-\bar{z}) + 1 = z\bar{z} + i(z-\bar{z}) + 1$

ssi $z - \bar{z} = 0$ ssi $\mathrm{Im}(z) = 0$ ssi $z \in \mathbb{R}$.

b) On peut écrire $z = x + iy$. Puis $\dfrac{1-z}{1-iz} = \dfrac{1-x-iy}{1-ix+y} = \dfrac{(1-x-iy)(1+ix+y)}{(1+y)^2+x^2}$

$= \dfrac{(1-x+y)+i(x-y-x^2-y^2)}{(1+y)^2+x^2}$.

Ainsi $\dfrac{1-z}{1-iz} \in \mathbb{R}$ ssi $x - y - x^2 - y^2 = 0$ (la partie imaginaire est nulle)

ssi $(x-1/2)^2 + (y+1/2)^2 = 1/2$. Le cercle de centre $(\dfrac{1}{2}, -\dfrac{1}{2})$ et de rayon $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

c) De même $\dfrac{1-z}{1-iz} \in i\mathbb{R}$ ssi $1 - x + y = 0$ (la partie réelle est nulle)

ssi $y = x - 1$. La droite qui passe par $(1,0)$ et est dirigé par le vecteur $(1,1)$.

Exercice 13

<u>*Solution*</u> :

a) On note $z = x + iy \neq i$. Les points sont alignés z, i et iz sont alignés

ssi $\dfrac{z - iz}{z - i} \in \mathbb{R}$ ssi $\mathrm{Im}\left(\dfrac{z - iz}{z - i}\right) = 0$

Or $\mathrm{Im}\dfrac{z - iz}{z - i} = \dfrac{(x + iy)(1 - i)}{x + iy - i} = \dfrac{[(x + y) + i(y - x)][x - i(y - 1)]}{x^2 + (y - 1)^2}$

$= \dfrac{(x + y)(1 - y) + (y - x)x}{x^2 + (y - 1)^2}$.

Cette quantité est nulle ssi $(x + y)(1 - y) + (y - x)x = 0$

ssi $x^2 + y^2 - x - y = 0$ ssi $(x - 1/2)^2 + (y - 1/2)^2 = 1/2 = (\sqrt{2}/2)^2$.

Donc l'ensemble de solution est le cercle de centre $(1/2, 1/2)$ et de rayon $\sqrt{2}/2$.

b) La condition $1, z$ et $1 - z$ alignés donne $\dfrac{z - 1}{(1 - z) - 1} \in \mathbb{R}$

ssi $\dfrac{z - 1}{-z} \in \mathbb{R}$ ssi $-1 + \dfrac{1}{z} \in \mathbb{R}$ ssi $\dfrac{1}{z} \in \mathbb{R}$ ssi $z \in \mathbb{R}^*$.

Dans le cas où $z \in \mathbb{R}^*$, on a bien $1, z, 1 - z, 1/z \in \mathbb{R}$ sont dans l'axe des abscisses.

Exercice 14

<u>*Solution*</u> :

a) Soit $z \in \mathbb{C}$. On a $f(z) = z$ ssi $z^2 + z + 1 = z$ ssi $z^2 + 1 = 0$ ssi $z \in \{i, -i\}$.

b) Soit $z = x + iy \in \mathbb{C}$. On a $f(z) \in \mathbb{R}$ ssi $\mathrm{Im}[f(z)] = 0$

ssi $\mathrm{Im}[z^2 + z + 1] = 0$ ssi $\mathrm{Im}[x^2 - y^2 + 2ixy + x + iy + 1] = 0$

ssi $2xy + y = 0$ ssi $(y = 0$ ou $2x + 1 = 0)$ ssi $(y = 0$ ou $x = -1/2)$

C'est l'union de deux droites.

c) Soit $z \in \mathbb{C} - \{1\}$. Les points d'affixes $A(1), M(z)$ et $M'(f(z))$ sont alignés

ssi $(\vec{AM}, \vec{AM'}) \equiv 0[\pi]$

ssi $\mathrm{Arg}\left(\dfrac{f(z) - 1}{z - 1}\right) \equiv 0[\pi]$

ssi $\mathrm{Im}\left(\dfrac{z^2 + z}{z - 1}\right) = 0$ car c'est un réel.

Or $\mathrm{Im}\left(\dfrac{z^2 + z}{z - 1}\right) = \mathrm{Im}\left(\dfrac{x^2 - y^2 + 2ixy + x + iy}{x - 1 + iy}\right)$

$= \mathrm{Im}\left(\dfrac{[(x^2 - y^2 + x) + i(2xy + y)][(x - 1) - iy]}{(x - 1)^2 + y^2}\right)$

$= \dfrac{(2xy + y)(x - 1) - y(x^2 - y^2 + x)}{(x - 1)^2 + y^2}$.

Cette quatitée est nulle ssi $(2xy + y)(x - 1) - y(x^2 - y^2 + x) = 0$

ssi $y[2x^2 - x - 1 - x^2 + y^2 - x] = 0$ ssi $(y = 0$ ou $x^2 - 2x + y^2 = 1)$

ssi $(y = 0$ ou $(x - 1)^2 + y^2 = \sqrt{2}^2$.

C'est donc l'union de la droite des abscisses et du cercle de centre $(1, 0)$ et de rayon $\sqrt{2}$.