TD3 - Corrigé

Exercice 1

Indication :

On peut utiliser les règles algébriques des fonctions exponentielles et logarithme :

$$\log_b(xy) = \log_b(x) + \log_b(y)$$

$$b^{x+y} = b^x \times b^y$$

Solution :

a) Soit $x \in \mathbb{R}$ tel que $x > 2$.
On a : $2\ln(x+1) + \ln(3x+5) + \ln(2) = \ln(6x+1) + 2\ln(x-2)$
ssi $\ln\left[2(x+1)^2(3x+5)\right] = \ln\left[(6x+1)(x-2)^2\right]$
ssi $2(x+1)^2(3x+5) = (6x+1)(x-2)^2$ ssi $6x^3 + 22x^2 + 26x + 10 = 6x^3 - 23x^2 + 20x + 4$
ssi $45x^2 + 6x + 6 = 0$ ssi $15x^2 + 2x + 2 = 0$ avec $\Delta = -116 < 0$.
L'équation n'a pas de solution réelle.

b) Soit $x \in \mathbb{R}$. On pose $y = e^x \in \mathbb{R}_+^*$.
On a $e^{2x} - 2e^x - 3 = 0$ ssi $y^2 - 2y - 3 = 0$ ssi $y \in \{3, -1\}$
ssi $y = 3$ car $y > 0$ ssi $e^x = 3$ ssi $x = \ln 3$.

c) Soit $x \in \mathbb{R}$. On a $5^x - 5^{x+1} + 2^{3x-1} = 0$ ssi $5^x(1-5) = \frac{-1}{2}2^{3x}$
ssi $8.5^x = 2^{3x}$ ssi $\ln(8) + x\ln(5) = 3x\ln(2)$ ssi $x = \frac{3\ln(2)}{3\ln(2)-\ln(5)}$.

d) La fonction $f(x) = \sqrt{x+2} + \sqrt{x+3} + \sqrt{x+6}$ est définie et continue sur $[-2, +\infty[$.
Elle est strictement croissante en tant que somme de fonctions strictement croissante.
Donc elle réalise une bijection continue de $[-2, +\infty[$ vers $[f(-2), \lim_{+\infty} f[= [3, +\infty[$.
Ainsi l'équation $f(x) = 3 = f(-2)$ admet une unique solution $x = -2$.

e) Soit $x, y \in \mathbb{R}_+^*$. Le système est équivalent à :
$$\begin{cases} x + y & = 520 \\ \log_{10}(xy) & = 4 \end{cases} \text{ ssi } \begin{cases} x + y & = 520 \\ xy & = 10^4 = 10000 \end{cases}$$
Donc $\{x, y\}$ sont les racines du polynômes $X^2 - 520X + 10000 = (X-20)(X-500)$.
Il y a deux couples de solutions $(20, 500)$ et $(500, 20)$.

f) Les deux dernières équations donnent :
$$\begin{cases} e^x e^y e^z & = e^6 \\ \ln(3^x 3^y) & = z\ln(3) \end{cases} \text{ ssi } \begin{cases} x + y + z & = 6 \\ (x + y - z)\ln(3) & = 0 \end{cases} \text{ ssi } \begin{cases} x + y & = 3 \\ z & = 3 \end{cases}.$$
Puis la première équation fournit le système :
$$\begin{cases} 2^x + 2^y + 2^3 & = 15 \\ x + y & = 3 \end{cases} \text{ ssi } \begin{cases} 2^x + 2^y & = 15 - 8 = 7 \\ 2^x 2^y & = 2^3 = 8 \end{cases}$$
Donc $\{2^x, 2^y\}$ sont les racines de $X^2 - 7X + 8$.
Ainsi $\{2^x, 2^y\} = \{\frac{7-\sqrt{17}}{2}, \frac{7+\sqrt{17}}{2}\}$
On a $(x, y, z) \in \left\{(\log_2 \frac{7-\sqrt{17}}{2}, \log_2 \frac{7+\sqrt{17}}{2}, 3); (\log_2 \frac{7+\sqrt{17}}{2}, \log_2 \frac{7-\sqrt{17}}{2}, 3)\right\}$

Exercice 2

Indication :

On déterminer le domaine de dérivabilité des fonctions. On calcul la dérivée en préférant des écritures multiplicatives. On détermine son signe à l'aide de tableau de signes.

On en déduit les variations et on calcul les limites aux bords des intervalles de définition.

Solution :

a) La fonction $f(x) = \frac{x}{2} + \ln\left(\frac{x-1}{3x-4}\right)$ est de classe C^∞ sur $]4/3, +\infty[$ par opérations.

Pour $x > 3/4, f(x) = x/2 + \ln(x-1) - \ln(3x-4)$ donc $f'(x) = 1/2 + \frac{1}{x-1} - \frac{3}{3x-4}$ $= \frac{(x-1)(3x-4)+2(3x-4)-6(x-1)}{2(x-1)(3x-4)} = \frac{3x^2-7x+2}{2(x-1)(3x-4)}$

Le polynôme $3x^2 - 7x + 2$ s'annule en $x_1 = \frac{7-5}{6} = 1/3$ et $x_2 = \frac{7+5}{6} = 2$

Donc f est strictement décroissante sur $]4/3, 2]$ puis croissante sur $[2, +\infty[$.

De plus $\lim_{4/3} f = +\infty$, $f(2) = 1 - \ln(2)$ et $\lim_{+\infty} f = +\infty$

x	$-\infty$		$1/3$		1		$4/3$		2		$+\infty$
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$\frac{1}{6} + \ln\frac{2}{9}$	$\searrow$	$-\infty$		$+\infty$	$\searrow$	$1 - \ln 2$	$\nearrow$	$+\infty$

b) La fonction $f : x \mapsto \frac{x^2-x}{x-3}$ est de classe C^∞ sur $\mathbb{R} - \{3\}$. On a $f'(x) = \frac{(2x-1)(x-3)-1(x^2-x)}{(x-3)^2} = \frac{x^2-6x+3}{(x-3)^2}$.

Les racines de $x^2 - 6x + 3$ sont $3 \pm \sqrt{6}$ avec $f(3 \pm \sqrt{6}) = 1 \pm 2\sqrt{6}$.

Les limites au bornes sont $\lim_{-\infty} f = -\infty = \lim_{3^-} f = -\infty$

et $\lim_{+\infty} f = +\infty = \lim_{3^+} f = +\infty$.

x	$-\infty$		$3-\sqrt{6}$		3		$3+\sqrt{6}$		$+\infty$
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$1-2\sqrt{6}$	$\searrow$	$-\infty$ || $+\infty$	$\searrow$	$1+2\sqrt{6}$	$\nearrow$	$+\infty$

c) La fonction $f(x) = \frac{1}{x^2} - \frac{8}{x+1}$ est de classe C^∞ sur $\mathbb{R} - \{-1, 0\}$.

On a $f'(x) = \frac{-2}{x^3} + \frac{8}{(x+1)^2} = 2\frac{-(x+1)^2+4x^3}{x^3(x+1)^2}$

Le numérateur est $4x^3 - (x+1)^2 = 4x^3 - x^2 - 2x - 1 = (x-1)(4x^2+3x+1)$ avec $4x^2 + 3x + 1 > 0$.

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$f(x)$	0	$\nearrow$	$+\infty$ || $-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$ || $+\infty$	$\searrow$	-3	$\nearrow$	0

d) La fonction $f(x) = \ln(x^2+1)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x) = \frac{2x}{x^2+1}$.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

e) La fonction $f(x) = x\ln\left(e + \frac{1}{x}\right)$ est de classe C^∞ sur $]0, +\infty[$.

On a $f'(x) = \ln\left(e + \frac{1}{x}\right) + \frac{x.(-1/x^2)}{e+(1/x)} = \ln(1+ex) - \ln(x) - \frac{1}{ex+1}$

Puis $f''(x) = \frac{e}{1+ex} - \frac{1}{x} - \frac{e}{(ex+1)^2} = \frac{ex(1+ex)-(1+ex)^2-ex}{x(1+ex)^2} = \frac{(ex)^2-(1+ex)^2}{x(1+ex)^2} = \frac{-2ex-1}{x(1+ex)^2} < 0$

x	0	$+\infty$
$f(x)$	0 $\nearrow$	$+\infty$
$f'(x)$	$+\infty$ $\searrow$	1

f) On a $\frac{x^3}{2-x} > 0$ ssi $x \in]0, 2[$.
Puis $\left(\frac{x^3}{2-x}\right)' = \frac{3x^2(2-x)+x^3}{(2-x)^2} = \frac{6x^2-2x^3}{(2-x)^2} = \frac{2x^2(3-x)}{(2-x)^2} < 0$.
Donc $x \mapsto \frac{x^3}{2-x}$ est décroissante sur $]0, 2[$ et $t \mapsto \sqrt{t}$ est croissante.
Donc la composée $x \mapsto \sqrt{\frac{x^3}{2-x}}$ est décroissante.

Exercice 3

<u>Indication</u> :

On remplace les fonctions hyperboliques par leurs définitions :

$$\mathrm{ch}\,(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \mathrm{sh}\,(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \text{ et } \mathrm{th}\,(x) = \frac{\mathrm{sh}\,x}{\mathrm{ch}\,x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

<u>Solution</u> :

a) On a $\mathrm{ch}\,^2 x - \mathrm{sh}\,^2 x = \frac{(e^x+e^{-x})^2}{4} - \frac{(e^x-e^{-x})^2}{4}$
$= \frac{e^{2x}+2+e^{-2x}}{4} - \frac{e^{2x}-2+e^{-2x}}{4} = \frac{4}{4} = 1$.

b) On a $\mathrm{ch}\,x\mathrm{ch}\,y + \mathrm{sh}\,x\mathrm{sh}\,y = \frac{(e^x+e^{-x})(e^y+e^{-y})}{4} + \frac{(e^x-e^{-x})(e^y-e^{-y})}{4}$
$= \frac{e^{x+y}+e^{x-y}+e^{-x+y}+e^{-x-y}}{4} + \frac{e^{x+y}-e^{x-y}-e^{-x+y}+e^{-x-y}}{4}$
$= \frac{e^{x+y}+e^{-x-y}}{2} = \mathrm{ch}\,(x+y)$.

c) On peut dériver l'équation précédente par rapport à x avec y constant.
On a $\mathrm{sh}\,(x+y) = \frac{d}{dx}\mathrm{ch}\,(x+y) = \frac{d}{dx}(\mathrm{ch}\,x\mathrm{ch}\,y + \mathrm{sh}\,x\mathrm{sh}\,y) = \mathrm{sh}\,x\mathrm{ch}\,y + \mathrm{ch}\,x\mathrm{sh}\,y$.

d) On a $\mathrm{th}\,(x+y) = \frac{\mathrm{sh}\,(x+y)}{\mathrm{ch}\,(x+y)} = \frac{\mathrm{sh}\,x\mathrm{ch}\,y+\mathrm{ch}\,x\mathrm{sh}\,y}{\mathrm{ch}\,x\mathrm{ch}\,y+\mathrm{sh}\,x\mathrm{sh}\,y} = \frac{\mathrm{ch}\,x\mathrm{ch}\,y(\mathrm{th}\,x+\mathrm{th}\,y)}{\mathrm{ch}\,x\mathrm{ch}\,y(1+\mathrm{th}\,x\mathrm{th}\,y)} = \frac{\mathrm{th}\,x+\mathrm{th}\,y}{1+\mathrm{th}\,x\mathrm{th}\,y}$.

e) On a $\mathrm{ch}\,(2x) = \mathrm{ch}\,(x+x) = \mathrm{ch}\,^2(x) + \mathrm{sh}\,^2(x)$ d'après b)
$= 1 + \mathrm{sh}\,^2 x + \mathrm{sh}\,^2 x = 1 + 2\mathrm{sh}\,^2 x$ avec $\mathrm{ch}\,^2 x = 1 + \mathrm{sh}\,^2 x$ d'après a)
$= 2\mathrm{ch}\,^2 x - 1$ avec $\mathrm{sh}\,^2 x = \mathrm{ch}\,^2 x - 1$ d'après a)

f) On a $\mathrm{sh}\,(2x) = \mathrm{sh}\,(x+x) = 2\mathrm{sh}\,x\mathrm{ch}\,x$ d'après c)

Exercice 4

<u>Indication</u> :

Les fonctions sont des réciproques sur certains domaines. Hors de ces domaines, il faut utiliser la périodicité des fonctions circulaires.

$$\mathrm{Arcsin}\, : [-1, 1] \to [-\pi/2, \pi/2]$$
$$\mathrm{Arccos}\, : [-1, 1] \to [0, \pi]$$
$$\mathrm{Arctan}\, : \mathbb{R} \to]-\pi/2, \pi/2[$$

<u>Solution</u> :

a) Soit $x \in [-1, 1]$. On a $\mathrm{Arcsin}\,x + \mathrm{Arccos}\,x = \pi/2$. Donc $\mathrm{Arcsin}\,x - \mathrm{Arccos}\,x = 2\mathrm{Arcsin}\,x - \pi/2$.
Puis $\mathrm{Arcsin}\,x - \mathrm{Arccos}\,x = 2\mathrm{Arctan}\,2x - \pi/2$
ssi $2\mathrm{Arcsin}\,x - \pi/2 = 2\mathrm{Arctan}\,2x - \pi/2$ ssi $\mathrm{Arcsin}\,x = \mathrm{Arctan}\,2x$
ssi $\tan \mathrm{Arcsin}\,x = 2x$. Or $\sin \mathrm{Arcsin}\,x = x$ et $\cos ASx = \sqrt{1-x^2}$.
ssi $\frac{x}{\sqrt{1-x^2}} = 2x$ ssi $x = 0$ ou $\sqrt{1-x^2} = 1/2$ ssi $x \in \{0, \sqrt{3}/2, -\sqrt{3}/2\}$

b) On a $\tan(a+b) = \frac{\tan a + \tan b}{1-\tan a \tan b}$ donc $\tan(\text{Arctan}\, 2x + \text{Arctan}\, x) = \frac{2x+x}{1-2x^2}$.
Puis $\text{Arctan}\, 2x + \text{Arctan}\, x = \pi/4[\pi]$ ssi $\frac{3x}{1-2x^2} = 1$ ssi $3x = 1-2x^2$
ssi $2x^2+3x-1=0$ ssi $x \in \{\frac{-3-\sqrt{17}}{4}, \frac{-3+\sqrt{17}}{4}\}$

c) On a $x = \sin(\text{Arcsin}\,(4/5) + \text{Arcsin}\,(5/13))$
$= \sin(\text{Arcsin}\,(4/5))\cos(\text{Arcsin}\,(5/13)) + \cos(\text{Arcsin}\,(4/5))\sin(\text{Arcsin}\,(5/13))$
$= 4/5\sqrt{1-(5/13)^2} + \sqrt{1-(4/5)^2}5/13 = (4/5)\times(12/13) + (3/5)\times(5/13) = \frac{63}{65}$.

d) On a $\sin(2\text{Arccos}\,(\text{cotan}(2\text{Arctan}\, x))) = 0$ ssi $2\text{Arccos}\,(\text{cotan}(2\text{Arctan}\, x)) \in \pi\mathbb{Z}$
ssi $\text{Arccos}\,(\text{cotan}(2\text{Arctan}\, x)) \in (\pi/2)\mathbb{Z} \cap [0,\pi] = \{0, \pi/2, \pi\}$
ssi $\text{cotan}(2\text{Arctan}\, x) \in \{\cos 0, \cos(\pi/2), \cos\pi\} = \{1, 0, -1\}$
ssi $2\text{Arctan}\, x \in \{\pi/4, \pi/2, 3\pi/4\} + \pi\mathbb{Z}$
ssi $\text{Arctan}\, x \in \{\pi/8, \pi/4, 3\pi/8\} + (\pi/2)\mathbb{Z} \cap]-\pi/2, \pi/2[$
ssi $x \in \{\tan(-3\pi/8), \tan(-\pi/4), \tan(-\pi/8), \tan(\pi/8), \tan(\pi/4), \tan(3\pi/8)\}$
ssi $x \in \left\{\frac{-1}{t}, -1, -t, t, 1, \frac{1}{t}\right\}$ avec $t = \tan(\pi/8)$.

Exercice 5

Indication :

On utilise la formule de la dérivée d'une composée. Si $A = g \circ f$ avec $f : I \to \mathbb{R}$ et $g : J \to \mathbb{R}$ dérivables telles que $f(I) \subset J$ alors A est dérivable sur I avec $A'(x) = f'(x) \times g'(f(x))$.

Solution :

a) On a $\text{sh} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $\text{Arctan} : \mathbb{R} \to]-\pi/2, \pi/2[$ de classe C^∞
Donc $A(x) = \text{Arctan}\,(\text{sh}\, x)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $A'(x) = \frac{\text{ch}\, x}{1+\text{sh}^2 x} = \frac{\text{ch}\, x}{\text{ch}^2 x} = \frac{1}{\text{ch}\, x}$

b) On a ln dérivable sur $]0, +\infty[$ et pour $x \in \mathbb{R}, \text{sh}\, x > 0$ ssi $x > 0$.
Donc $B(x) = \ln(\text{sh}\, x)$ est dérivable sur $]0, +\infty[$ et $B'(x) = \frac{\text{ch}\, x}{\text{sh}\, x} = \frac{1}{\text{th}\, x}$.

c) Pour $x \in \mathbb{R}, 1+x^2 \geq 1 \geq 0$ donc $0 \leq \frac{1}{1+x^2} \leq 1$. et Arccos dérivable sur $]-1, 1[$.
Donc $C(x) = \text{Arccos}\left(\frac{1}{1+x^2}\right)$ est dérivable sur $\mathbb{R}^*$.
On a $C'(x) = \frac{-2x}{(1+x^2)^2}\frac{-1}{\sqrt{1-(\frac{1}{1+x^2})^2}} = \frac{2x}{(1+x^2)\sqrt{1+2x^2+x^4-1}}\ \frac{2x}{(1+x^2)\sqrt{2x^2+x^4}}$

d) La fonction ln est dérivable sur $]1, +\infty[$ à valeurs dans $]0, +\infty[$.
La fonction $t \mapsto \sqrt{t}$ est dérivable sur $]0, +\infty[$ à valeurs dans $]0, +\infty[$.
La fonction sin est dérivable sur $\mathbb{R}$.
Donc la composée D est dérivable sur $]1, +\infty[$ et $D'(x) = \frac{1}{x}\frac{1}{2\sqrt{\ln x}}\cos(\sqrt{\ln x})$.

e) On a $\sin x > 0$ ssi $x \in]0, \pi[+2\pi\mathbb{Z}$.
Donc la fonction $f(x) = e^x \ln(\sin x)$ est dérivable sur $]0, \pi[+2\pi\mathbb{Z}$
et $E'(x) = e^x \ln(\sin x) + e^x \frac{\cos}{\sin x} = e^x\left(\ln\sin x + \frac{1}{\tan x}\right)$

f) On a $\ln x \in]-1, 1[$ ssi $x \in]1/e, e[$.
Donc la fonction $F(x) = \text{Arccos}\, \ln x$ est dérivable sur $]1/e, e[$ et $F'(x) = \frac{1}{x}\frac{-1}{\sqrt{1-\ln^2 x}}$

g) On écrit $G(x) = x^{\text{Arcsin}\, x} = \exp(\text{Arcsin}\, x \ln x)$ la fonction est dérivable sur $]0, 1[$
Puis $G'(x) = \left(\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\ln x + \text{Arcsin}\, x \frac{1}{x}\right)\exp(\text{Arcsin}\, x \ln x) = \left(\frac{\ln x}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{\text{Arcsin}\, x}{x}\right)x^{\text{Arcsin}\, x}$

h) On écrit $H(x) = \ln\frac{\sqrt{1+\sin x}}{\sqrt{1-\sin x}} = \frac{1}{2}\ln(1+\sin x) - \frac{1}{2}\ln(1-\sin x)$.
On a $1+\sin x > 0$ ssi $\sin x \neq -1$ ssi $x \notin -\pi/2 + 2\pi\mathbb{Z}$
Et $1-\sin x > 0$ ssi $\sin x \neq 1$ ssi $x \notin \pi/2 + 2\pi\mathbb{Z}$
Donc la fonction est dérivable sur $]-\pi/2, \pi/2[+\pi\mathbb{Z}$
et $H'(x) = \frac{\cos x}{2(1+\sin x)} - \frac{-\cos x}{2(1-\sin x)} = \frac{2\cos x}{2(1-\sin^2 x} = \frac{1}{\cos x}$.

i) On a $\frac{1-y}{1+y} > 0$ ssi $(1-y)(1+y) > 0$ ssi $1-y^2 > 0$ ssi $y \in]-1, 1[$
Puis $\cos x \in]-1, 1[$ ssi $x \notin \{0, \pi\} + 2\pi\mathbb{Z}$ ssi $x \in]0, \pi[+\pi\mathbb{Z}$
Donc cos est dérivable sur $]0, \pi[+\pi\mathbb{Z}$ à valeurs dans $]-1, 1[$

La fonction $y \mapsto \frac{1-y}{1+y}$ est dérivable sur $]-1,1[$ à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$.
La fonction $\sqrt{}$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$
La fonction Arctan est dérivable sur $\mathbb{R}$. Donc la composée est dérivable sur $]0,\pi[+\pi\mathbb{Z}$.
De plus, $I'(x) = -\sin x \frac{-2}{(1+\cos x)^2} \frac{1}{2\sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}}} \frac{1}{1+\frac{1-\cos x}{1+\cos x}}$
$= \frac{\sin x}{\sqrt{(1+\cos x)(1-\cos x)}[1+\cos x+1-\cos x]} = \frac{\sin x}{2|\sin x|} = \pm\frac{1}{2}$

Exercice 6

Indication :

Pour établir une identité du type $A(x) = B(x)$ qui dépend d'un paramètre réel, on peut étudier la fonction $f(x) = B(x) - A(x)$ à l'aide de sa dérivée.

Solution :

La fonction $f(x) = 2\mathrm{Arctan}\,(\mathrm{th}\, x) - \mathrm{Arctan}\,(\mathrm{sh}\, 2x)$ est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$
et $f'(x) = 2\frac{1}{\mathrm{ch}^2 x}\frac{1}{1+\mathrm{th}^2 x} - 2\mathrm{ch}\,(2x)\frac{1}{1+\mathrm{sh}^2 2x}$
$= \frac{2}{\mathrm{ch}^2 x+\mathrm{sh}^2 x} - \frac{2}{\mathrm{ch}\, 2x}$ car $1+\mathrm{sh}^2 = \mathrm{ch}^2$
$= 0$ car $\mathrm{ch}^2 x + \mathrm{sh}^2 x = \mathrm{ch}\,(2x)$.
Donc f est constante et vaut $f(0) = 0$.
Ainsi pour tout $x \in \mathbb{R}, f(x) = 0$ et $2\mathrm{Arctan}\,(\mathrm{th}\, x) = \mathrm{Arctan}\,(\mathrm{sh}\, 2x)$.

Exercice 7

Indication :

On essaye d'appliquer d'une part la formule du binôme de Newton et d'autre part celle de Leibniz.

Ces deux formules font apparaître les coefficients binomiaux et permettent de construire des identités nouvelles.

Solution :

Le polynôme se développe en $f_n(x) = x^n \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^{n+k}$ à l'aide de la formule du binôme de Newton.

Donc en dérivant la combinaison linéaire : $f_n^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \frac{(n+k)!x^k}{k!}$.

Le coefficient dominant est $a_n = \binom{n}{n}\frac{(2n)!}{n!}$.

En dérivant le produit avec la formule de Leibniz, on a : $f_n^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \frac{n!x^{n-k}}{(n-k)!}\frac{n!(x+1)^k}{k!}$
$= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2 n! x^{n-k} \sum_{l=0}^k \binom{k}{l} x^l$
$= \sum_{0\leq l\leq k\leq n} n!\binom{n}{k}^2\binom{k}{l} x^{n-k+l}$.

Le coefficient dominant de x^n est $a_n = \sum_{k=0}^n n!\binom{n}{k}^2\binom{k}{k} = n!\sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2$.

Ainsi en identifiant les coefficients dominants, on trouve $\frac{a_n}{n!} = \binom{2n}{n} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2$

Exercice 8

Indication :

On évite de faire la dérivée n-ième d'un produit et on préfère faire la dérivée n-ième d'une combinaison linéaire.

Pour cela, on peut décomposer en élément simple certaine fraction.
Si $f(x) = \frac{ax+b}{(x-x_1)(x-x_2)}$ alors il existe des constantes A, B telles que $f(x) = \frac{A}{x-x_1} + \frac{B}{x-x_2}$.

Solution :

On a $f(x) = \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x+1}$ puis $f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^n n!}{(x-1)^{n+1}} + \frac{(-1)^n n!}{(x+1)^{n+1}}$
On a $g(x) = \frac{1}{2i}\frac{1}{x-i} - \frac{1}{2i}\frac{1}{x+i}$ donc $g^{(n)}(x) = \frac{1}{2i}\left(\frac{(-1)^n n!}{(x+i)^{n+1}} - \frac{(-1)^n n!}{(x-i)^{n+1}}\right)$
$= \mathrm{Im}\left(\frac{(-1)^n n!}{(x+i)^{n+1}}\right) = (-1)^n n! \mathrm{Im}\left(\frac{(x-i)^{n+1}}{(x^2+1)^{n+1}}\right)$
$= \frac{(-1)^n n!}{(x^2+1)^{n+1}} \mathrm{Im}\left(\sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} (-i)^k x^{n+1-k}\right)$
$= \frac{(-1)^n n!}{(x^2+1)^{n+1}} \sum_{k \text{ impair}} \binom{n+1}{k} - (i^2)^{(k-1)/2} x^{n+1-k}$ car $i^k \in i\mathbb{R}^*$ ssi k impair.
$= \frac{(-1)^{n+1} n!}{(x^2+1)^{n+1}} \sum_{k \text{ impair}} \binom{n+1}{k} (-1)^{(k-1)/2} x^{n+1-k}$