TD4 - Corrigé

Exercice 1

Indication :

On utilise la linéarité et les formules de référence.

Solution :

a) On a $\sin(2x-\frac{\pi}{6}) = \frac{d}{dx}\left(\frac{-1}{2}\cos(2x-\pi/6)\right)$

b) On a $\frac{1}{\cos^2\left(x+\frac{\pi}{2}\right)} = \frac{d}{dx}\left(\tan(x+\pi/2)\right)$

c) On a $\sin^2(x) = \frac{1-\cos 2x}{2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{x}{2}-\frac{\sin 2x}{4}\right)$

d) On a $\cos^2(x) = \frac{1+\cos 2x}{2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{x}{2}+\frac{\sin 2x}{4}\right)$

e) On a $\frac{1}{(2x+5)^3} = \frac{1}{8}(x+5/2)^{-3} = \frac{d}{dx}\left(\frac{-1}{16}(x+5/2)^{-2}\right)$

f) On a $\tan^2(x) = 1+\tan^2 x - 1 = \frac{d}{dx}\left(\tan x - x\right)$

Exercice 2

Indication :

On met en place la formule $\int_a^b fg = [Fg]_a^b - \int_a^b Fg'$.
On utilise la règle "Arctan Log Polynôme Exponentielle Sinus" pour le choix de l'IPP.

Solution :

a) $\int_0^1 t^2e^t\,\mathrm{d}t = [t^2e^t]_0^1 - \int_0^1 2te^t\,\mathrm{d}t$
$= [t^2e^t]_0^1 - [2te^t]_0^1 + \int_0^1 2e^t\,\mathrm{d}t$
$= [t^2e^t]_0^1 - [2te^t]_0^1 + [2e^t]_0^1$
$= [(t^2-2t+2)e^t]_0^1 = e-2.$

b) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t\ln(1+\cos t)\,\mathrm{d}t = [\sin t\ln(1+\cos t)]_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2}\sin t\frac{-\sin t}{1+\cos t}\,\mathrm{d}t$
$= 0-0+\int_0^{\pi/2}\frac{1-\cos^2 t}{1+\cos t}\,\mathrm{d}t$
$= \int_0^{\pi/2} 1-\cos t\,\mathrm{d}t$ car $1-\cos^2 t = (1-\cos t)(1+\cos t)$
$= [t-\sin t]_0^{\pi/2} = \pi/2-1.$

c) $\int_1^2 \frac{\ln(1+t)}{t^2}\,\mathrm{d}t = [\frac{-1}{t}\ln(1+t)]_1^2 - \int_0^1 \frac{-1}{t}\frac{1}{t+1}\,\mathrm{d}t$
$= \ln(2) - \frac{\ln 3}{2} + \int_0^1 \frac{1}{t} - \frac{1}{t+1}\,\mathrm{d}t$ en décomposant en éléments simples
$= \ln(2) - \frac{\ln 3}{2} + [\ln t - \ln(t+1)]_1^2$
$= 3\ln 2 - \frac{3}{2}\ln 3.$

d) $\int_0^\pi te^t\sin(2t)\,\mathrm{d}t = \mathrm{Im}\left(\int_0^\pi te^{(1+2i)t}\,\mathrm{d}t\right)$
$= \mathrm{Im}\left([t\frac{e^{(1+2i)t}}{1+2i}]_0^\pi - \int_0^\pi \frac{e^{(1+2i)t}}{1+2i}\,\mathrm{d}t\right)$
$= \mathrm{Im}\left([t\frac{e^{(1+2i)t}}{1+2i} - \frac{e^{(1+2i)t}}{(1+2i)^2}]_0^\pi\right)$
$= \mathrm{Im}\left(\pi e^\pi\frac{1}{1+2i} - e^\pi\frac{1}{-3+4i} + \frac{1}{-3+4i}\right)$
$= \mathrm{Im}\left(\pi e^\pi\frac{1-2i}{5} - e^\pi\frac{-3-4i}{25} + \frac{-3-4i}{25}\right)$
$= \frac{-2}{5}\pi e^\pi + \frac{4}{25}e^\pi - \frac{4}{25}$

Exercice 3

Indication :

Une primitive de $x\mapsto f(x)$ sur un intervalle I est donnée par
$F(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ avec $a\in I$ une borne fixée.

Solution :

a) Pour $t\in\mathbb{R}$, on a $\int_0^t (x+1)e^{-x}\,\mathrm{d}x = \left[(x+1)\frac{e^{-x}}{-1} - 1\frac{e^{-x}}{(-1)^2}\right]_0^t = -(t+2)e^{-t}+2$

b) Pour $t\in\mathbb{R}$ on a $\int_0^t (x^2+x+1)e^{2x}\,\mathrm{d}x = \left[(x^2+x+1)\frac{e^{2x}}{2} - (2x+1)\frac{e^{2x}}{4} + 2\frac{e^{2x}}{8}\right]_0^t.$

à l'aide de l'intégration par parties itérées $\begin{array}{cc|c} + & x^2+x+1 & e^{2x} \\ - & 2x+1 & \frac{e^{2x}}{2} \\ + & 1 & \frac{e^{2x}}{4} \\ - & 0 & \frac{e^{2x}}{8} \end{array}$

c) Pour $t \in \mathbb{R}$, on a $I = \int_0^t e^x \sin x \, \mathrm{d}x = [e^x(-\cos x) - e^x(-\sin x)]_0^t + \int_0^t e^x(-\sin x) \, \mathrm{d}x$.
Ainsi $I = e^t(\sin t - \cos t) + 1 - I$.
Puis $I = \frac{1}{2}(e^t(\sin t - \cos t) + 1)$

d) Pour $t \in \mathbb{R}$, on a $\int_0^t x\mathrm{Arctan}\, x \, \mathrm{d}x$
$= [\frac{x^2}{2}\mathrm{Arctan}\, x]_0^t - \int_0^t \frac{x^2}{2}\frac{1}{1+x^2} \, \mathrm{d}x$ à l'aide d'une IPP
$= \frac{1}{2}t^2\mathrm{Arctan}\,(t) - \frac{1}{2}\int_0^t \left(1 - \frac{1}{1+x^2}\right) \mathrm{d}x$
$= \frac{1}{2}t^2\mathrm{Arctan}\,(t) - \frac{1}{2}t + \frac{1}{2}\mathrm{Arctan}\, t$.

e) Pour $t \in \mathbb{R}_+^*$, on a $\int_1^t 1.\ln^2 x \, \mathrm{d}x = [x \ln^2 x]_1^t - \int_1^t x\frac{1}{x}2\ln x \, \mathrm{d}x$
$= t\ln^2 t - 2[x\ln x - x]_1^t = t\ln^2 t - 2t\ln t + 2t - 2$

f) Pour $t \in \mathbb{R}_+^*$, on a $\int_1^t \sqrt{x}\ln x \, \mathrm{d}x = [\frac{2}{3}x^{3/2}\ln x]_1^t - \int_1^t \frac{2}{3}x^{3/2}\frac{1}{x} \, \mathrm{d}x$
$= \frac{2}{3}t\sqrt{t}\ln t - \frac{2}{3}[\frac{2}{3}x^{3/2}]_1^t = \frac{2}{3}t\sqrt{t}\ln t - \frac{4}{9}(t\sqrt{t} - 1)$

g) Pour $t \in \mathbb{R}$, on a $\int_0^t e^x \cos^2 x \, \mathrm{d}x = \int_0^t e^x \frac{1+\cos 2x}{2} \, \mathrm{d}x = \frac{1}{2}[e^x]_0^t + \frac{1}{2}I$
avec $I = \int_0^t e^x \cos 2x \, \mathrm{d}x = [e^x\cos(2x) - e^x(-2\sin 2x)]_0^t + \int_0^t e^x(-4\cos 2x) \, \mathrm{d}x$
$= e^t(\cos 2t - 2\sin 2t) - 1 - 4I$.
D'où $I = \frac{1}{5}e^t(\cos 2t - 2\sin 2t) - \frac{1}{5}$
Puis $\int_0^t e^x \cos^2 x = \frac{1}{2}e^t + \frac{1}{10}e^t(\cos 2t - 2\sin 2t) - \frac{3}{5}$

h) Pour $t \in \mathbb{R}_+^*$, on a $I = \int_1^t 1.\sin(\ln x) \, \mathrm{d}x = [x\sin(\ln x)]_1^t - \int_1^t x\frac{1}{x}\cos(\ln x) \, \mathrm{d}x$
$t\sin(\ln t) - [x\cos(\ln x)]_1^t + \int_1^t x\frac{1}{x}(-\sin(\ln x)) \, \mathrm{d}x$ $t\sin(\ln t) - t\cos(\ln t) + 1 - I$
Donc $I = \frac{1}{2}(t\sin(\ln t) - t\cos(\ln t) + 1)$.

Exercice 4

<u>**Indication**</u> **:**

On applique la formule $\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(u) \, \mathrm{d}u = \int_a^b f(\varphi(x))\varphi'(x) \, \mathrm{d}x$ avec $\begin{cases} u & = \varphi(x) \\ \mathrm{d}u & = \varphi'(x) \, \mathrm{d}x \end{cases}$

<u>**Solution**</u> **:**

a) On réalise le changement de variables $u = \sqrt{1+x}$ et $\mathrm{d}u = \frac{\mathrm{d}x}{2\sqrt{1+x}}$.
On a $\int_3^t \frac{1}{x\sqrt{1+x}} \, \mathrm{d}x = \int_{\sqrt{4}}^{\sqrt{1+t}} \frac{2}{u^2-1} \, \mathrm{d}u$
$= \int_2^{\sqrt{1+t}} \frac{1}{u-1} - \frac{1}{u+1} \, \mathrm{d}u$
$= [\ln|u-1| - \ln|u+1|]_2^{\sqrt{1+t}}$
$= \ln\left(\frac{\sqrt{1+t}-1}{\sqrt{1+t}+1}\right) - \ln 3$

b) On réalise le changement de variable $u = \sqrt{x}$ et $\mathrm{d}u = \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}}$.
On a $\int_1^t x^{-1/2}2^{\sqrt{x}} \, \mathrm{d}x = \int_1^{\sqrt{t}} 2^u 2 \, \mathrm{d}u$
$= 2\int_1^{\sqrt{t}} \exp(u\ln 2) \, \mathrm{d}u$
$= 2\frac{2^{\sqrt{t}}-2}{\ln 2}$

c) On réalise le changement de variable $u = \cos x$ et $\mathrm{d}u = -\sin x \, \mathrm{d}x$.
On a $\int_{\pi/2}^t \frac{\sin x}{1-\cos x} \, \mathrm{d}x$
$= \int_0^{\cos t} \frac{-\mathrm{d}u}{1-u}$
$= [\ln|u-1|]_0^{\cos t}$
$= \ln(1-\cos t)$

d) On réalise le changement de variable $u = \sin x$ et $\mathrm{d}u = \cos x \,\mathrm{d}x$.
Pour $t \in]0, \pi[$, on a $\int_{\pi/2}^{t} \frac{\cos^3 x}{\sin^2 x}\,\mathrm{d}x$
$= \int_{\pi/2}^{t} \frac{1-\sin^2 x}{\sin^2 x}(\cos x\,\mathrm{d}x)$
$= \int_{1}^{\sin t} \frac{1-u^2}{u^2}\,\mathrm{d}u$
$= \int_{1}^{\sin t} (\frac{1}{u^2} - 1)\,\mathrm{d}u$
$= \left[-\frac{1}{u} - u\right]_1^{\sin t}$
$= 2 - \frac{1}{\sin t} - \sin t$.

e) On réalise le changement de variable $u = 1 + \ln x$ et $\mathrm{d}u = \frac{\mathrm{d}x}{x}$.
Pour $t > 1/e$, on a $\int_1^t \frac{2+\ln x}{x(1+\ln x)^3}\,\mathrm{d}x$
$= \int_1^t \frac{1+(1+\ln t)}{(1+\ln t)^3}\,\frac{\mathrm{d}x}{x}$
$= \int_1^{1+\ln t} \frac{1+u}{u^3}\,\mathrm{d}u$
$= \int_1^{1+\ln t} \frac{1}{u^3} + \frac{1}{u^2}\,\mathrm{d}u$
$= \left[\frac{u^{-2}}{-2} + \frac{u^{-1}}{-1}\right]_1^{1+\ln t}$
$= \frac{3}{2} - \frac{1}{2(1+\ln t)^2} - \frac{1}{1+\ln t}$.

f) On réalise le changement de variable $u = \sqrt{e^x+1}$ et $\mathrm{d}u = \frac{e^x}{2\sqrt{e^x+1}}\,\mathrm{d}x$.
On a également $e^x = u^2 - 1$.
Pour $t \in \mathbb{R}$, on a : $\int_0^t \frac{e^{2x}}{\sqrt{e^x+1}}\,\mathrm{d}x$
$= \int_0^t 2e^x \frac{e^x}{2\sqrt{e^x+1}}\,\mathrm{d}x$
$= \int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{e^t+1}} 2(u^2-1)\,\mathrm{d}u$
$= 2\left[\frac{u^3}{3} - u\right]_{\sqrt{2}}^{\sqrt{e^t+1}}$
$= \frac{2}{3}(e^t+1)^{3/2} - 2\sqrt{e^t+1} + C$.

g) On réalise le changement de variable $u = \mathrm{ch}\,(x)$ et $\mathrm{d}u = \mathrm{sh}\,x\,\mathrm{d}x$.
On a également $\mathrm{sh}\,^2 x = \mathrm{ch}\,^2 x - 1 = u^2 - 1$.
Pour $t \in \mathbb{R}$, on a $\int_0^t \frac{\mathrm{sh}\,^3 x}{3+\mathrm{ch}\,x}\,\mathrm{d}x$
$= \int_0^t \frac{\mathrm{sh}\,^2 x}{3+\mathrm{ch}\,x}\mathrm{sh}\,x\,\mathrm{d}x$
$= \int_1^{\mathrm{ch}\,t} \frac{u^2-1}{3+u}\,\mathrm{d}u$
$= \int_1^{\mathrm{ch}\,t} u - 3 + \frac{8}{u+3}\,\mathrm{d}u$ (décomposition en éléments simples)
$= \left[\frac{u^2}{2} - 3u + 8\ln|u+3|\right]_1^{\mathrm{ch}\,t}$
$= \frac{1}{2}\mathrm{ch}\,^2 t - 3\mathrm{ch}\,t + 8\ln(\mathrm{ch}\,t + 3) + C$

Exercice 5

<u>**Indication**</u> **:**
A l'aide du changement de variable proposé, on trouve une équation vérifiée par I.
On calcul la nouvelle quantité avec le changement de variable $x = \cos u$.

<u>**Solution**</u> **:**
On réalise le changement de variables $u = \pi - t$ et $\mathrm{d}u = -\,\mathrm{d}t$.
Donc $I = \int_0^\pi \frac{t\sin(t)dt}{3+\sin^2 t} = \int_\pi^0 \frac{(\pi-u)\sin u(-\,\mathrm{d}u)}{3+\sin^2 u} = \pi\int_0^\pi \frac{\sin u\,\mathrm{d}u}{3+\sin^2 u} - I$.
Donc $I = \frac{\pi}{2}\int_0^\pi \frac{\sin u\,\mathrm{d}u}{3+\sin^2 u}$ puis on fait le changement de variable $x = \cos u$ et $\mathrm{d}x = -\sin u\,\mathrm{d}u$
D'où $I = \frac{\pi}{2}\int_1^0 \frac{-\,\mathrm{d}x}{3+(1-x^2)} = \frac{\pi}{2}\int_0^1 \frac{-1/4}{x-2} + \frac{1/4}{x+2}\,\mathrm{d}x$
$= \frac{\pi}{2}[(1/4)\ln\left|\frac{x+2}{x-2}\right|]_0^1] = \frac{\pi}{8}\ln 3$.

Exercice 6

<u>**Indication**</u> **:**
On applique la méthode de décomposition en éléments simples :

1. On réalise la division euclidienne.
2. On factorise le dénominateur.
3. On détermine les coefficients de la décomposition.
4. On primitive avec les formules de référence.

Solution :

a) On a $\frac{2x+3}{x^2-4} = \frac{2x+3}{(x-2)(x+2)} = \frac{7/4}{x-2} + \frac{1/4}{x+2}$.
Donc $x \mapsto \frac{7}{4}\ln|x-2| + \frac{1}{4}\ln|x+2|$ est une primitive sur $\mathbb{R}\setminus\{-2,2\}$.

b) On a $\frac{3x+7}{x^2-3x+2} = \frac{3x+7}{(x-1)(x-2)} = \frac{-10}{x-1} + \frac{13}{x-2}$.
Donc $x \mapsto -10\ln|x-1| + 13\ln|x-2|$ est une primitive sur $\mathbb{R}\setminus\{1,2\}$.

c) On a $x^2+1 = 1.(x^2+x+1) - x$ donc $\frac{x^2+1}{x^2+x+1} = 1 + \frac{-x}{x^2+x+1}$
$= 1 - \frac{(x+1/2)-1/2}{(x+1/2)^2+3/4} = 1 - \frac{(x+1/2)}{(x+1/2)^2+(\sqrt{3}/2)^2} + \frac{1}{2}\frac{1}{(x+1/2)^2+(\sqrt{3}/2)^2}$
Donc $x \mapsto x - \frac{1}{2}\ln(x^2+x+1) - \frac{1}{2}\frac{2}{\sqrt{3}}\mathrm{Arctan}\left(\frac{x+1/2}{\sqrt{3}/2}\right)$ est une primitive sur $\mathbb{R}$.

d) On a $\frac{x-1}{x^2+3x+2} = \frac{x-1}{(x+1)(x+2)} = \frac{-2}{x+1} + \frac{3}{x+2}$
Donc $x \mapsto -2\ln|x+1| + 3\ln|x+2|$ est une primitive sur $\mathbb{R}\setminus\{-2,-1\}$.

e) On a $\frac{x^2}{x^2-x-2} = 1 + \frac{x+2}{(x+1)(x-2)}$
$= 1 + \frac{-1/3}{x+1} + \frac{4/3}{x-2}$.
Donc $x \mapsto x - \frac{1}{3}\ln|x+1| + \frac{4}{3}\ln|x-2|$ est une primitive sur $\mathbb{R}\setminus\{-1,2\}$.

f) $\frac{2x-5}{x(x-1)(x+1)} = \frac{5}{x} + \frac{-3/2}{x-1} + \frac{-7/2}{x+1}$.
Donc $x \mapsto 5\ln|x| - \frac{3}{2}\ln|x-1| - \frac{7}{2}\ln|x+1|$ est une primitive sur $\mathbb{R}\setminus\{-1,0,1\}$.

Exercice 7

Indication : On applique la méthode de résolution des EDL1.

1. On écrit sous forme normale l'équation $y'(x) = a(x)y(x) + b(x)$.
2. On détermine le domaine de définition I de a et b.
3. La solution homogène génératrice est : $y_h(x) = \exp(A(x))$ avec A une primitive de a.
4. La solution particulière est donnée par la méthode de Lagrange $y_p(x) = K(x)y_h(x)$ avec K à déterminer.

Solution :

a) L'équation différentielle linéaire d'ordre 1 s'écrit $y'(x) = \frac{x+2}{x(x+1)}y(x) + \frac{2}{x+1}$
Elle est définie sur $\mathbb{R} - \{-2,0\}$
Le coefficient $a(x) = \frac{x+2}{x(x+1)} = \frac{2}{x} - \frac{1}{x+1}$ admet pour primitive $A(x) = 2\ln|x| - \ln|x+1|$
Donc $y_h(x) = \exp A(x) = \frac{x^2}{x+1}$ est une solution homogène génératrice.
Avec la méthode de Lagrange, on recherche $y_p(x) = K(x)y_h(x)$.
On obtient $K'(x)y_h(x) = \frac{2}{x+1}$. Donc $K'(x) = \frac{x+1}{x^2}\frac{2}{x+1} = \frac{2}{x^2}$ puis $K(x) = \frac{-2}{x}$.
Ainsi $y_p(x) = \frac{-2}{x}\frac{x^2}{x+1} = \frac{-2x}{x+1}$.
Les solutions de l'équation sont de la forme $y(x) = \lambda y_h + yp = \frac{\lambda x^2 - 2x}{x+1}$.

b) L'équation différentielle linéaire d'ordre 1 s'écrit $y'(x) = \frac{1}{x}y(x) + \frac{(x^2+x+1)^3}{x}$
Elle est définie sur $\mathbb{R} - \{,0\}$
On a $y_h(x) = \exp\ln|x| = x$ est une solution homogène génératrice.
Avec la méthode de Lagrange, on recherche $y_p(x) = K(x)y_h(x)$.
On obtient $K'(x)y_h(x) = \frac{(x^2+x+1)^3}{x} = x^5 + 3x^4 + 6x^3 + 7x^2 + 6x + 3 + \frac{1}{x}$.
Donc $K'(x) = x^4 + 3x^3 + 6x^2 + 7x + 6 + 3/x + 1/x^2$ puis $K(x) = x^5/5 + 3x^4/4 + 6x^3/3 + 7x^2/2 + 6x + 3\ln|x| - 1/x$.
Ainsi $y_p(x) = x^6/5 + 3x^5/4 + 2x^4 + 7x^3/2 + 6x^2 + 3x\ln|x| - 1$.

c) L'équation différentielle est à coefficient constant. On a $y_h(x) = e^{3x}$ solution homogène. On recherche un solution particulière sous la forme $y_p(x) = ax^2 + bx + c$

On trouve $-3ax^2 + (2a-3b)x + (b-3c) = x^2$ d'où $\begin{cases} -3a &= 1 \\ 2a-3b &= 0 \\ b-3c &= 0 \end{cases}$

Donc $a = -1/3, b = (2/3)a = -2/9$ et $c = b/3 = -2/27$. Puis $y_p(x) = -x^2/3 - 2x/9 - 2/27$.

d) La solution homogène génératrice est $y_h(x) = \exp 2\ln|x| = x^2$.

La méthode de Lagrange donne $y_p(x) = x^2 K(x)$ avec $x^2 K'(x) = \frac{2x^2(1+2x^2)}{x(x^2+1)}$

Donc $K(x) = \int_1^x \frac{2(1+2t^2)}{t(1+t^2)}\,\mathrm{d}t = \int_1^{x^2} \frac{1+2u}{u(1+u)}\,\mathrm{d}u$ avec le changement de variable $u = t^2$ et $\mathrm{d}u = 2t\,\mathrm{d}t$.

Donc $\mathbb{K}(x) = \ln(x^2) + \ln(1+x^2)$ car $\frac{1+2u}{u(1+u)} = \frac{1}{u} + \frac{1}{u+1}$.

Ainsi $y(x) = \lambda y_h(x) + y_p(x) = \lambda x^2 + 2x^2\ln x + x^2\ln(1+x^2)$ pour $\lambda \in \mathbb{R}$.

e) La solution homogène génératrice est $y_h(x) = \exp(-\sin x)$.

Puis on a $y_p(x) = K(x)\exp(-\sin x)$ avec $K'(x)\exp(-\sin x) = \sin x/2$.

Donc $K(x) = \frac{1}{2}\int_0^x \sin t \exp(\sin t)\,\mathrm{d}t$ (intégrale non calculable)

Puis $y(x) = \lambda e^{-\sin x} + \frac{1}{2}e^{-\sin x}\int_0^x \sin t\exp(\sin t)\,\mathrm{d}t$

f) L'équation à coefficient constant admet pour solution homogène $y_h(x) = e^{-x}$

On recherche $y_1(x) = P(x)e^{-x}$ solution de $y_1' + y_1 = 2xe^{-x}$. On a donc $P'(x)e^{-x} = 2xe^{-x}$ d'où $P'(x) = 2x$ et $P(x) = x^2$ convient.

De même, on recherche $y_2(x) = ax^2 + bx + c$ solution de $y_2' + y_2 = x^2$. On a $ax^2 + (2a+b)x + (b+c) = x^2$ d'où $\begin{cases} a &= 1 \\ 2a+b &= 0 \\ b+c &= 0 \end{cases}$. Donc $a = 1, b = -2$ et $c = 2$.

Ainsi d'après le principe de superposition, $y(x) = \lambda e^{-x} + x^2e^{-x} + x^2 - 2x + 2$.

Exercice 8

Indication :

On applique la méthode de résolution des EDL2 $y'' + a_1y' + a_0y = b(t)$ à coefficients constants.

1. On recherche les racines du polynôme caractéristique $\chi(X) = X^2 + a_1X + a_0$.
2. Suivant le cas, on introduit les solutions homogènes génératrices $y_{h,1}, y_{h,2}$.
3. On décompose $b(t) = \sum \alpha_k b_k(t)$ avec $b_k(t) = P(t)e^{\beta_k t}$.
4. On recherche une solution particulière de la forme $y_k(t) = Q(t)e^{\beta_k t}$.
5. On fait une conclusion avec le principe de superposition.

Solution :

a) $y'' - 4y' + 3y = e^x$

C'est une équation différentielle linéaire d'ordre 2 à coefficients constants avec second membre e^x.

Le polynôme caractéristique est $\chi(X) = X^2 - 4X + 3 = (X-1)(X-3)$. Donc les solutions homogènes génératrices sont $y_1(x) = e^x$ et $y_2(x) = e^{3x}$.

On recherche une solution particulière sous la forme $y_p(x) = axe^x$ car 1 est racine simple de χ. On trouve $a(x+2)e^x - 4a(x+1)e^x + 3ae^x = e^x$ donc $-2a = 1$ puis $a = -1/2$.

Donc $y(x) = \lambda_1y_1 + \lambda_2y_2 + y_p = (-x/2 + \lambda_1)e^x + \lambda_2e^{3x}$.

b) $y'' - 4y' + 3y = e^x\cos x = \mathrm{Re}(e^{(1+i)x})$

C'est une équation différentielle linéaire d'ordre 2 à coefficients constants avec second membre $\mathrm{Re}(e^{(1+i)x})$.

Le polynôme caractéristique est $\chi(X) = X^2 - 4X + 3 = (X-1)(X-3)$. Donc les solutions homogènes génératrices sont $y_1(x) = e^x$ et $y_2(x) = e^{3x}$.

On recherche une solution particulière sous la forme $y_p(x) = ae^{(1+i)x}$ car $1+i$ n'est pas racine de χ. On trouve $a(1+i)^2e^{(1+i)x} - 4a(1+i)e^{(1+i)x} + 3ae^{(1+i)x} = e^{(1+i)x}$ donc $a(2i - 4 - 4i + 3) = 1$ puis $a = \frac{1}{-1-2i} = \frac{-1+2i}{5}$.

Donc $y(x) = \lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2 + \mathrm{Re}(y_p) = (\lambda_1 - 1/5\cos x - 2/5\sin x)e^x + \lambda_2 e^{3x}$.

c) $y'' - 2y' + 5y = e^x \sin 2x = \mathrm{Im}(e^{(1+2i)x})$

C'est une équation différentielle linéaire d'ordre 2 à coefficients constants.

Le polynôme caractéristique est $\chi(X) = X^2 - 2X + 5 = (X-1)^2 + 2^2$. Donc les solutions homogènes génératrices sont $y_1(x) = e^x \cos 2x$ et $y_2(x) = e^x \sin 2x$.

On recherche une solution particulière sous la forme $y_p(x) = axe^{(1+2i)x}$ car $1+2i$ est racine simple de χ. On trouve $a[(1+i)^2x + 2(1+2i)]e^{(1+i)x} - 2a[(1+2i)x+1]e^{(1+2i)x} + 5axe^{(1+2i)x} = e^{(1+2i)x}$ donc $a(2+4i-2) = 1$ puis $a = \frac{1}{4i} = -i/4$. Puis $\mathrm{Im}(y_p) = -x/4\cos 2xe^x$.

Donc $y(x) = \lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2 + \mathrm{Im}(y_p) = e^x((-x/4 + \lambda_1)\cos 2x + \lambda_2 \sin 2x)e^x$.

d) $y'' + 2y' + 2y = x^2 sh\, x \cos x = x^2 \frac{e^x - e^{-x}}{2}\mathrm{Re}(e^{ix}) = \frac{1}{2}x^2\mathrm{Re}(e^{(1+i)x}) - \frac{1}{2}x^2\mathrm{Re}(e^{(-1+i)x})$

C'est une équation différentielle linéaire d'ordre 2 à coefficients constants.

Le polynôme caractéristique est $\chi(X) = X^2 + 2X + 2 = (X+1)^2 + 1^2$. Donc les solutions homogènes génératrices sont $y_1(x) = e^{-x}\cos x$ et $y_2(x) = e^{-x}\sin x$.

On recherche une solution particulière avec second membre $x^2e^{(1+i)x}$ sous la forme $y_{p1}(x) = P(x)e^{(1+i)x}$. On trouve $P''(x) + (4+2i)P'(x) + (4+4i)P(x) = x^2$ donc en posant $P(x) = ax^2 + bx + c$ On a $\begin{cases} (4+4i)a & = 1 \\ (4+2i)2a + (4+4i)b & = 0 \\ 2a + (4+2i)b + (4+4i)c & = 0 \end{cases}$ D'où $a = \frac{1}{4+4i} = \frac{1-i}{8}$, $b = -\frac{2+i}{1+i}a = \frac{-1+2i}{8}$ et $c = \frac{1}{4+4i}(-2a - (4+2i)b) = \frac{1-5i}{32}$ Ainsi on a $\mathrm{Re}(y_{p1}) = e^{-x}((x^2/8 - x/8 + 1/32)\cos x + (x^2/8 - x/4 + 5/32)\sin x)$.

On recherche une solution particulière avec second membre $x^2e^{(1+i)x}$ sous la forme $y_{p2}(x) = Q(x)e^{(-1+i)x}$. On trouve $Q''(x) + 2iQ'(x) = x^2$ donc en posant $Q(x) = ax^3 + bx^2 + cx$. On a $\begin{cases} 6ia & = 1 \\ 6a + 4ib & = 0 \\ 2b + 2ic & = 0 \end{cases}$ D'où $a = \frac{1}{12i} = -i/6$, $b = -6a/4i = 1/4$ et $c = -b/i = i/4$. Ainsi $\mathrm{Re}(y_{p2}) = e^{-x}(-x^2\sin x + x/4\cos x + 1/4\sin x)$

Donc $y(x) = \lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2 + \frac{1}{2}\mathrm{Re}(y_{p1}) - \frac{1}{2}\mathrm{Re}(y_{p2})$.

e) $y'' + y' + y = x\cos x$.

On a $\chi(X) = X^2 + X + 1 = (X-j)(X-j^2)$ avec $j = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$. On pose $y_1(x) = e^{-x/2}\cos(\sqrt{3}x/2)$ et $y_2(x) = e^{-x/2}\sin(\sqrt{3}x/2)$.

Pour $b(x) = \mathrm{Re}(xe^{ix})$. On recherche $y_p(x) = \mathrm{Re}((ax+b)e^{ix})$.

On obtient $2ai - (ax+b) + a + i(ax+b) + (ax+b) = x$.

Donc $\begin{cases} ia & = 1 \\ (2i+1)a + ib & = 0 \end{cases}$. Puis $a = -i$ et $b = -(2i+1)a/i = 1+2i$.

Donc $\mathrm{Re}((-ix + 1 + 2i)e^{ix}) = x\sin x + \cos x - 2\sin x$.

Donc $y(x) = e^{-x/2}(\lambda_1\cos(\sqrt{3}x/2) + \lambda_2\sin(\sqrt{3}x/2)) + \cos x + (x-2)\sin x$.

f) $y'' - 2y' + y = ch\, x = \frac{1}{2}e^x + \frac{1}{2}e^{-x}$

On a $\chi(X) = X^2 - 2x + 1 = (X-1)^2$. On pose $y_1(x) = e^x$ et $y_2(x) = xe^x$.

On recherche $y_{p1}(x) = ax^2e^x$ solution de $y'' - 2y' + y = e^x$. On trouve $2a = 1$ d'où $y_{p1}(x) = x^2/2e^x$.

Puis $y_{p2}(x) = ae^{-x}$ solution de $y'' - 2y' + y = e^{-x}$. On trouve $4a = 1$ d'où $y_{p2}(x) = 1/4e^{-x}$

Donc $y(x) = \lambda_1 y_1(x) + \lambda_2 y_2(x) + \frac{1}{2}y_{p1}(x) + \frac{1}{2}y_{p2}(x) = (x^2/4 + \lambda_2 x + \lambda_1)e^x + 1/8e^{-x}$

g) $y'' - 4y' + 5y = e^{2x}\cos x + e^x \sin 2x$

On a $\chi(X) = X^2 - 4X + 5 = (X-2)^2 + 1^2$.

On pose $y_1(x) = e^{2x}\cos x$ et $y_2(x) = e^{2x}\sin x$.
Pour $b_1(x) = e^{2x}\cos x = \mathrm{Re}(e^{(2+i)x})$, on recherche $y_{p1} = \mathrm{Re}(axe^{(2+i)x})$.
Puis $2ia = 1$ donc $a = \frac{1}{2i} = -i/2$ et $y_{p1}(x) = x/2e^{2x}\sin x$.
Pour $b_2(x) = e^{x}\sin 2x = \mathrm{Im}(e^{(1+2i)x})$, on recherche $y_{p1} = \mathrm{Im}(axe^{(1+2i)x})$.
Puis $(-2-4i)a = 1$ donc $a = -1/10 + i/5$ et $y_{p2}(x) = e^{x}(-1/10\sin 2x + 1/5\cos 2x)$.

h) $y'' - 2y' + y = e^{x}(x^2 + x + 1)$
On a $\chi(X) = X^2 - 2X + 1 = (X-1)^2$. On pose $y_1(x) = e^{x}$ et $y_2(x) = xe^{x}$.
On recherche $y_p(x) = P(x)e^{x}$ on trouve $P''(x) = x^2+x+1$ d'où $P(x) = x^4/12 + x^3/6 + x^2/2$ convient.

i) $y'' - 6y' + 13y = e^{3x}(x\cos 2x + \sin 2x)$
On a $\chi(X) = X^2 - 6X + 13 = (X-3)^2 + 2^2$.
On pose $y_1(x) = e^{3x}\cos 2x$ et $y_2(x) = e^{3x}\sin 2x$.
On a $b(x) = \mathrm{Re}(e^{(3+2i)x}(x - i))$, on recherche $y_p(x) = \mathrm{Re}((ax^2 + bx)e^{(3+2i)x})$

j) $y'' - 2y' + 2y = xe^{x}\sin 2x$
On a $\chi(X) = X^2 - 2X + 2 = (X-1)^2 + 1^2$.
On pose $y_1(x) = e^{x}\cos x$ et $y_2(x) = e^{x}\sin x$.
On a $b(x) = \mathrm{Im}(xe^{(1+2i)x})$, on recherche $y_p(x) = \mathrm{Im}((ax + b)e^{(1+2i)x})$

k) $y'' - 5y' + 6y = (x^2 + 1)e^{2x}$
On a $\chi(X) = X^2 - 5X + 6 = (X-2)(X-3)$. On pose $y_1(x) = e^{2x}$ et $y_2(x) = e^{3x}$.
On recherche $y_p(x) = P(x)e^{2x}$, on a $P''(x) + -P'(x) = x^2 + 1$ avec $P(x) = ax^3 + bx^2 + c$.

l) $y'' - 3y' + 2y = xch^2x + x^2\cos x + xe^{3x}\sin x$
On a $\chi(X) = X^2 - 3X + 2 = (X-1)(X-2)$. On pose $y_1(x) = e^{x}$ et $y_2(x) = e^{2x}$.
On recherche $y_p(x) = K(x)e^{x}$, on trouve l'EDL1 $K''(x) - K'(x) = e^{-x}b(x)$.
Avec la Méthode de Lagrange $K'(x) = \lambda(x)e^{x}$ avec $\lambda'(x)e^{x} = e^{-x}b(x)$.
Donc $\lambda'(x) = x/4 + xe^{-2x} + x/4e^{-4x} + x^2\cos xe^{-2x} + xe^{x}\sin x$
Puis $\lambda(x) = x^2/8 + (-x/2 - 1/4)e^{-2x} + (-x/16 - 1/64)e^{-4x} + ...$

m) $y'' - 3y' + 2y = -e^{x}(x+1)/x^2$
On a $\chi(X) = X^2 - 3X + 2 = (X-1)(X-2)$.
On pose $y_1(x) = e^{x}$ et $y_2(x) = e^{2x}$.
On recherche $y_p(x) = K(x)e^{x}$, on trouve l'EDL1 $K''(x) - K'(x) = \frac{x+1}{x^2} = \frac{1}{x^2} - \frac{-1}{x}$.
Donc $K'(x) = \lambda_2 e^{x} - \frac{1}{x}$. Puis $K(x) = \lambda_2 e^{x} - \ln x + \lambda_1$
Donc $y(x) = \lambda_1 e^{x} + \lambda_2 e^{2x} - e^{x}\ln x$.

n) $y'' + y = 1/\cos x$
On a $\chi(X) = X^2 + 1^2$.
On pose $y_1(x) = \cos x$ et $y_2(x) = \sin x$.
On recherche $y_p(x) = K(x)\cos(x)$ avec $K''(x)\cos(x) - 2K'(x)\sin x = \frac{1}{\cos x}$.
L'EDL $z'(x) - 2\tan x z(x) = 1/\cos^2 x$ se résout en $z(x) = \lambda(x)\exp(-2\ln\cos x) = \frac{\lambda(x)}{\cos^2 x}$
Puis $\lambda'(x) = 1$ donc $\lambda(x) = x$ convient.
Puis $K'(x) = \frac{x}{\cos^2(x)}$ et $K(x) = x\tan x + \ln(\cos x)$ par IPP.
Ainsi $y(x) = x\sin x + \cos x\ln(\cos x) + \lambda_1\cos x + \lambda_2\sin x$.