Mathématiques
Interrogation de révision

Prénom :

Nom :
PCSI 1

-L'usage des calculatrices et téléphones portables est interdit.
-Le détail des calculs n'est pas demandé. -Toutes les réponses doivent figurer sur ce document.

1. Simplifier l'expression suivante
$$\frac{\frac{2}{3}+\frac{5}{6}+2\sqrt{2}}{-2+\sqrt{2}}$$

Réponse :

2. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes
   (a) $\frac{3x+5}{2}=\frac{5x-2}{4}$
   (b) $e^{2x}+6e^{x}+1=8$

Réponse :
(a)
(b)

3. Résoudre dans $\mathbb{R}$, le système d'équations suivant
$$\begin{cases} x+\sqrt{2}y & =\sqrt{3} \\ \sqrt{2}x-y & =\sqrt{5} \end{cases}$$

Réponse :

4. Calculer les limites suivantes
   (a) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{4x^4+5x^3+6x^2-x+1}{6x^4+3x+1}$
   (b) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^x-1}{x}$
   (c) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln(x^2+1)}{\sqrt{x}}$

Réponse :
(a)

(b)

(c)

5. Donner le domaine de définition et les dérivés des fonctions suivantes
   (a) $f_1(x) = e^{1/x}\ln(x)$
   (b) $f_2(x) = \ln(x^3+1)\cos(x)$
   (c) $f_3(x) = \sin(x^2+1)e^{2x}$

Réponse :
(a) $f_1'(x) =$

(b) $f_2'(x) =$

(c) $f_3'(x) =$

6. Calculer les intégrales suivantes
   (a) $I_1 = \int_0^1 xe^x dx$
   (b) $I_2 = \int_0^\pi 3\cos(x)\sin(x)^2 dx$
   (c) $I_3 = \int_1^3 \frac{\ln(x)+2}{x} dx$

Réponse :
(a) $I_1 =$

(b) $I_2 =$

(c) $I_3 =$

Mathématiques
DS 1

Le 14 septembre 2024

Exercice 1 : Déterminer si les assertions logiques suivantes sont vraies ou fausses et le démonter

(a) $\exists y \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, (x^2+1=y) \implies (y=1)$

(b) $\forall x \in \mathbb{R}, \exists a \in \mathbb{R}^+, x^2 = a+1$

(c) $\forall a \in \mathbb{R}^+, \exists x \in \mathbb{R}, x^2 = a+1$

(d) $\forall n \in \mathbb{N}, \sum_{k=0}^{n} k! \leq (n+1)!$

Exercice 2 : Déterminer les solutions réelles des équations et inéquations suivantes.

(a) $\sqrt{3x-2} - \sqrt{x+7} = 1$

(b) $x+2 < \sqrt{3x^2+6}$

Exercice 3 : Dans cet exercice n désigne un entier strictement positif. Calculer les sommes suivantes

(a) $\sum_{k=1}^{n} (2k-1)(k+3)$

(b) $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(k+1)(k+3)}$

(c) $\sum_{0 \leq i \leq j \leq n}^{n} \binom{n}{i} 2^j$

Exercice 4 : Résoudre dans $\mathbb{R}$ les systèmes suivants.

(a)

$$\begin{cases} x+y+2z &= 1 \\ x+2y-z &= 2 \\ 2x-y-z &= 3 \end{cases}$$

(b)

$$\begin{cases} 2x-4y+2z+xyz &= 3 \\ x+y+z &= -2 \\ x-2y+z &= 1 \end{cases}$$

Exercice 5 : Les questions de cet exercice sont indépendantes.

(a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, nous avons

$$|\sin(nx)| \leq n|\sin(x)|$$

(b) Soit $(u_n)_{n\in N}$ la suite définie par la relation de récurrence

$$\begin{cases} u_0 & = 1 \\ u_{n+1} & = \frac{3}{n+1}\sum_{k=0}^{n} u_k u_{n-k} \end{cases}$$

Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 3^n$

Problème :

1. Montrer que pour tout $n, k, i \in \mathbb{N}$, nous avons

$$\binom{n}{k}\binom{k}{i} = \binom{n}{i}\binom{n-i}{n-k}$$

2. En déduire que pour tout $n, i \in \mathbb{N}$

$$\sum_{k=i}^{n}(-1)^{n-k}\binom{n}{k}\binom{k}{i} = \binom{n}{i}0^{n-i}$$

3. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites numériques telles que

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}v_k.$$

Alors, montrer que l'on a

$$\forall n \in \mathbb{N}, v_n = \sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}\binom{n}{k}u_k.$$