Devoir Surveillé de Mathématiques n^o 2 - Corrigé

Question de Cours.

1. $\boxed{\text{Enoncer et démontrer l'inégalité triangulaire dans } \mathbb{C}.}$
   Pour $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, on a l'inégalité $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$.
   On calcul d'une part :
   $|z_1 + z_2|^2 = (z_1 + z_2)(\bar{z_1} + \bar{z_2}) = z_1\bar{z_1} + z_1\bar{z_2} + \bar{z_1}z_2 + z_2\bar{z_2} = |z_1|^2 + 2\mathrm{Re}(z_1\bar{z_2}) + |z_2|^2$.
   Et d'autre part :
   $(|z_1| + |z_2|)^2 = |z_1|^2 + 2|z_1||z_2| + |z_2|^2 = |z_1|^2 + 2\,|z_1\bar{z_2}| + |z_2|^2$.
   Ainsi la différence $(|z_1| + |z_2|)^2 - |z_1 + z_2|^2 = 2|u| - 2\mathrm{Re}(u) \geq 0$ avec $u = z_1\bar{z_2}$. Cette inégalité permet bien d'obtenir l'inégalité triangulaire.
2. $\boxed{\text{Calculer le module et l'argument des nombres complexes :}}$
   a. $\boxed{\dfrac{(6+6\sqrt{3}i)^{2025}}{(6+6i)^{2024}}}$

   On a $6 + 6\sqrt{3}i = 12\left(\dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}i\right) = 12e^{i\pi/3}$.

   Et $6 + 6i = 6\sqrt{2}e^{i\pi/4}$.
   Donc $\dfrac{(6+6\sqrt{3}i)^{2025}}{(6+6i)^{2024}} = (12e^{i\pi/3})^{2025}(6\sqrt{2}e^{i\pi/4})^{-2024}$
   $= \dfrac{12^{2025}}{6^{2024}2^{1012}} \exp\left(i\pi(\dfrac{2025}{3} - \dfrac{2024}{4})\right)$
   $= \dfrac{12 \times 2^{2024}}{2^{1012}} \exp\left(i\pi(675 - 506)\right)$
   $= 12 \times 2^{1012} \times (-1) = -3 \times 2^{1014}$.
   Le module est 3×2^{1014} et l'argument est π modulo 2π.

   b. $\boxed{\dfrac{e^{ia} - e^{ib}}{e^{ib} + e^{ia}}}$

   Soit $a, b \in \mathbb{R}$. La technique de l'arc moitié donne :
   $\dfrac{e^{ia} - e^{ib}}{e^{ib} + e^{ia}} = \dfrac{e^{i(a+b)/2}2i\sin\left(\frac{a-b}{2}\right)}{e^{i(a+b)/2}2\cos\left(\frac{a-b}{2}\right)}$
   $= \tan\left(\dfrac{a-b}{2}\right)e^{i\pi/2}$.
   Le module est $\left|\tan\left(\dfrac{a-b}{2}\right)\right|$ et l'argument est $\pi/2$ modulo π.
   Remarque : Le résultat final dépend du signe de tan qui peut ajouter π à l'argument si il est négatif.

Exercice 1 : $\boxed{\text{Résoudre sur } \mathbb{C} \text{ les équations suivantes :}}$

a) $\boxed{z^2 - (4+2i)z = -2 - 4i.}$

Il s'agit de résoudre l'équation du second degré $z^2 - (4+2i)z + (2+4i) = 0$.
Son discriminant est $\Delta = (4+2i)^2 - 4(2+4i) = 4 = 2^2$.
Donc les solutions sont $\dfrac{(4+2i) \pm 2}{2}$. Après simplification on obtient $3 + i$ et $1 + i$.

b) $\boxed{z^2+3z+3=i.}$

Il s'agit de résoudre l'équation du second degré $z^2+3z+(3-i)=0$.
Son discriminant est $\Delta = 3^2-4(3-i) = -3+4i$.
On recherche $\delta = a+ib$ de sorte que $\delta^2=\Delta$.
Il vérifie le système $\begin{cases} a^2-b^2 &= -3 \\ 2ab &= 4 \\ a^2+b^2 &= \sqrt{9+16}=5 \end{cases}$. On trouve $\delta = 1+2i$ (ou $-1-2i$). Donc les solutions sont $\dfrac{-3\pm(1+2i)}{2}$. Après simplification on obtient $-1+i$ et $-2-i$.

c) $\boxed{iz^{2n}+2z^n-2i=0 \text{ avec } n\in\mathbb{N}^*.}$

On note $w=z^n$. On commence par résoudre $iw^2+2w-2i=0$ du second degré. On a $\Delta=-4=(2i)^2$. Donc $w=\dfrac{-2\pm 2i}{2i}$.
On obtient $z^n=-1+i$ ou $z^n=1+i$ après simplification.
L'équation $z^n=1+i=\sqrt{2}e^{i\pi/4}$ admet $\omega 2^{1/(2n)}e^{i\pi/4n}$ pour $\omega\in\mathbb{U}_n$ comme solutions.
L'équation $z^n=-1+i=\sqrt{2}e^{3i\pi/4}$ admet $\omega 2^{1/(2n)}e^{3i\pi/4n}$ pour $\omega\in\mathbb{U}_n$ comme solutions.
Donc les solutions sont $2^{1/(2n)}\exp\left((8k+1)\dfrac{i\pi}{4n}\right)$ et $2^{1/(2n)}\exp\left((8k+3)\dfrac{i\pi}{4n}\right)$ pour $k\in[\![0,n-1]\!]$.

d) $\boxed{(z-2)^4=(z+3)^4.}$

Soit $z\in\mathbb{C}-\{-3\}$. Par équivalence, on obtient :
$(z-2)^4=(z+3)^4$ ssi $\left(\dfrac{z-2}{z+3}\right)=1$
ssi $\exists\omega\in\mathbb{U}_4, \dfrac{z-2}{z+3}=\omega$ (car $z\neq 3$)
ssi $\exists\omega\in\{i,-1,-i\}, z=\dfrac{3\omega+2}{1-\omega}$ (car $\omega\neq 1$)
ssi $z\in\left\{\dfrac{3i+2}{1-i}, \dfrac{-1}{2}, \dfrac{-3i+2}{1+i}\right\}$.
Donc les solutions sont après simplification $\dfrac{-1}{2}$, $\dfrac{-1+5i}{2}$ et $\dfrac{-1-5i}{2}$.

Exercice 2 : $\boxed{\text{Résoudre sur } \mathbb{R} \text{ les équations suivantes :}}$ Soit $x\in\mathbb{R}$.

a) $\boxed{\sqrt{3}\cos(x)+3\sin(x)=\sqrt{3}.}$

On a $\sqrt{3}+3i = 2\sqrt{3}\left(\dfrac{1}{2}+i\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2\sqrt{3}e^{i\pi/3}$.
Donc $\sqrt{3}\cos(x)+3\sin(x) = 2\sqrt{3}\cos(x-\pi/3)$.
Ainsi $\sqrt{3}\cos(x)+3\sin(x)=3\sqrt{3}$ ssi $2\sqrt{3}\cos(x-\pi/3)=\sqrt{3}$
ssi $\cos(x-\pi/3)=\dfrac{1}{2}$
ssi $x-\pi/3=\pi/3[2\pi]$ ou $x-\pi/3=-\pi/3[2\pi]$
ssi $x=2\pi/3[2\pi]$ ou $x=0[2\pi]$.

b) $\boxed{\sin(x+\pi/4) = \cos(2x-\pi/3).}$

On utilise la formule de symétrie $\sin(\theta) = \cos(\pi/2 - \theta)$.
Ainsi $\sin(x+\pi/4) = \cos(2x-\pi/3)$ ssi $\cos(\pi/2 - x - \pi/4) = \cos(2x - \pi/3)$
ssi $\pi/4 - x = 2x - \pi/3[2\pi]$ ou $x - \pi/4 = 2x - \pi/3[2\pi]$
ssi $3x = 7\pi/12[2\pi]$ ou $x = \pi/12[2\pi]$
ssi $x = \dfrac{7\pi}{36}\left[\dfrac{2\pi}{3}\right]$ ou $x = \dfrac{\pi}{12}[2\pi]$
Donc il y a 4 solutions modulo 2π : $\dfrac{\pi}{12}, \dfrac{7\pi}{36}, \dfrac{31\pi}{36}$ et $\dfrac{55\pi}{36}$.

c) $\boxed{2\cos^2(x) - 2\sin^2(x) + 2\sqrt{3}\sin(2x) = 0.}$

On utilise la formule de l'arc double $\cos(2\theta) = \cos^2\theta - \sin^2\theta$.
Ainsi $2\cos^2(x) - 2\sin^2(x) + 2\sqrt{3}\sin(2x) = 0$ ssi $2\cos(2x) + 2\sqrt{3}\sin(2x) = 0$
ssi $\tan(2x) = \dfrac{\sin(2x)}{\cos(2x)} = \dfrac{-2}{2\sqrt{3}} = -\dfrac{\sqrt{3}}{3}$
ssi $2x = -\pi/6[\pi]$ ssi $x = -\pi/12[\pi/2]$.
Donc il y a 4 solutions modulo 2π : $\dfrac{-\pi}{12}, \dfrac{5\pi}{12}\,\dfrac{11\pi}{12}$ et $\dfrac{17\pi}{12}$.

Problème I : $\boxed{\text{On considère les nombres réels } \alpha = \sqrt[3]{2+\sqrt{5}} \text{ et } \beta = \sqrt[3]{2-\sqrt{5}}.}$

1. $\boxed{\text{Calculer } \alpha\beta \text{ et } \alpha^3+\beta^3.}$

   On a $\alpha\beta = (2+\sqrt{5})^{1/3}(2-\sqrt{5})^{1/3} = (2^2 - \sqrt{5}^2)^{1/3} = (-1)^{1/3} = -1$.
   Et $\alpha^3 + \beta^3 = (2+\sqrt{5}) + (2-\sqrt{5}) = 4$.

2. $\boxed{\text{On note } s = \alpha+\beta. \text{ Montrer que } s^3 = 4 - 3s.}$

   On a $s^3 = \alpha^3 + 3\alpha^2\beta + 3\alpha\beta^2 + \beta^3 = (\alpha^3+\beta^3) + 3\alpha\beta(\alpha+\beta) = 4 - 3s$.

3. $\boxed{\text{Déterminer les racines de } X^3 + 3X - 4}$

   On remarque que 1 est une racine évidente du polynôme. Donc on peut trouver la factorisation $X^3 + 3X - 4 = (X-1)(X^2+X+4)$. On recherche les racines restantes du polynômes $X^2 + X + 4$ à l'aide du discriminant $\delta = 1 - 16 < 0$. Donc les autres racines sont complexes conjuguées à savoir $\dfrac{-1 \pm i\sqrt{15}}{2}$.

   $\boxed{\text{et en déduire la valeur de } s.}$

   On sait que s est racine du polynôme d'après la question précédente et s est un réel par construction. Donc $s = 1$.

4. $\boxed{\text{En déduire que } \alpha = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} \text{ et } \beta = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}.}$

   On obtient le système somme-produit $\begin{cases} \alpha+\beta & = 1 \\ \alpha\beta & = -1 \end{cases}$. Donc α et β sont les racines du polynôme $(X-\alpha)(X-\beta) = X^2 - X - 1$.

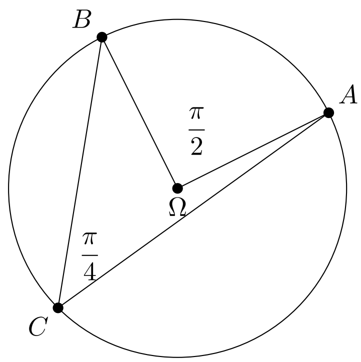
   Les deux racines de ce polynôme sont $\dfrac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$. On peut les distinguer par leurs signes.

En effet $\alpha = \sqrt[3]{2+\sqrt{5}} = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} > 0$ car $2+\sqrt{5} > 0$.

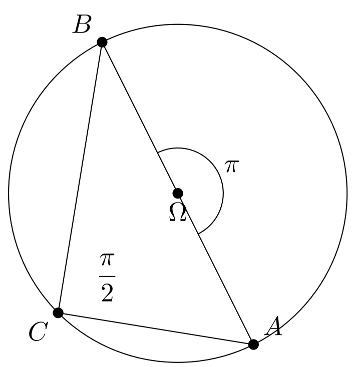
Et $\beta = \sqrt[3]{2-\sqrt{5}} = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2} < 0$ car $2-\sqrt{5} < 0$.

Problème II : On considère un cercle $\mathcal{C}$ de centre Ω et contenant trois points distincts A, B et C.

1. Tracer un exemple lorsque $(\vec{\Omega A}, \vec{\Omega B}) = \pi/2$ modulo 2π.



Tracer un second exemple lorsque $(\vec{CA}, \vec{CB}) = \pi/2$ modulo 2π.



2. Préciser quelles translation, homothétie et rotation permettent cette réduction du problème ?

On note $(O, \vec{u}_x, \vec{u}_y)$ un repère orthonormé.

On commence par appliquer une translation de vecteur $\vec{\Omega O}$ afin d'envoyer Ω sur l'origine.

Puis on applique l'homothétie de centre O et de rapport $1/R$ avec R le rayon de $\mathcal{C}$ afin que $\mathcal{C}$ deviennent le cercle unité.

Les points images A', B' et C' sont alors d'affixes respectivement z_1, z_2 et z_3 des nombres complexes de module 1. A l'aide d'une rotation de centre O de d'angle $(\vec{OC'}, \vec{u_x})$ permet d'envoyer C' sur le point d'affixe 1. Les autres points sont déplacés mais reste sur le cercle unité et sont d'affixe u_1 et u_2 de module 1.

Pourquoi démontrer cette version simplifiée permet-elle d'obtenir le résultat général ?

Les trois similitudes (translation, homothétie et rotation) conservent les angles. Donc le résultat simplifié et le résultat général sont équivalents car les angles sont identiques.

3. $\boxed{\text{Soit } u \in \mathbb{U}. \text{ Montrer que } \dfrac{(u-1)^2}{u} \text{ est un réel négatif.}}$

On peut écrire $u = e^{i\theta}$ avec $\theta \in [0, 2\pi]$.

Donc $\dfrac{(u-1)^2}{u} = (e^{i\theta} - 1)^2 e^{-i\theta} = (2ie^{i\theta/2}\sin(\theta/2))^2 e^{-i\theta}$

$= -4\sin^2(\theta/2)$ est bien un réel négatif.

4. $\boxed{\text{En déduire que } (\vec{\Omega A}, \vec{\Omega B}) = 2(\vec{CA}, \vec{CB}) \text{ modulo } 2\pi.}$

L'angle $(\vec{\Omega A}, \vec{\Omega B})$ est donné par l'argument de $\dfrac{u_2}{u_1}$

et celui de $(\vec{CA}, \vec{CB})$ est donné par l'argument de $\dfrac{u_2 - 1}{u_1 - 1}$.

Ainsi $2(\vec{CA}, \vec{CB}) - (\vec{\Omega A}, \vec{\Omega B}) = 2\text{Arg}\left(\dfrac{u_2 - 1}{u_1 - 1}\right) - \text{Arg}\left(\dfrac{u_2}{u_1}\right)$

$= \text{Arg}\left(\dfrac{(u_2-1)^2 u_1}{(u_1-1)^2 u_2}\right) = \text{Arg}\left(\dfrac{(u_2-1)^2}{u_2}\right) - \text{Arg}\left(\dfrac{(u_1-1)^2}{u_1}\right)$

$= \pi - \pi = 0$ modulo 2π. cqdf

Problème III : $\boxed{A = \sum_{k=0}^{n} \binom{3n}{3k}, \quad B = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{3n}{3k+1}, \quad \text{et} \quad C = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{3n}{3k+2}}$

1. $\boxed{\text{Calculer les valeurs de } A, B \text{ et } C \text{ pour}}$

$\boxed{n = 0}$ On a $A = 1, B = C = 0$ (des sommes vides).

$\boxed{n = 1}$ La troisième ligne du triangle de Pascal est $\boxed{1 \quad 3 \quad 3 \quad 1}$.

Donc $A = 1 + 1 = 2$ et $B = C = 3$.

$\boxed{n = 2}$ La sixième ligne du triangle de Pascal est $\boxed{1 \quad 6 \quad 15 \quad 20 \quad 15 \quad 6 \quad 1}$.

Donc $A = 1 + 20 + 1 = 22, B = 6 + 15 = 21$ et $C = 15 + 6 = 21$.

2. $\boxed{\text{Montrer l'égalité } A + B + C = 8^n.}$

On constate qu'il s'agit de sommer un terme sur trois dans une ligne du triangle de Pascal. Donc additionner les trois permet d'additionner tous les termes de la ligne.

En effet, $A = \sum_{\substack{l=0 \\ l=0 \bmod 3}}^{3n} \binom{3n}{l}$, $B = \sum_{\substack{l=0 \\ l=1 \bmod 3}}^{3n} \binom{3n}{l}$ et $C = \sum_{\substack{l=0 \\ l=2 \bmod 3}}^{3n} \binom{3n}{l}$.

Donc $A + B + C = \sum_{l=0}^{3n} \binom{3n}{l} = 2^{3n} = 8^n$ d'après la formule du binôme de Newton.

3. $\boxed{\text{On pose } \mathrm{j} = e^{i\frac{2\pi}{3}}. \text{ Montrer que } 1 + \mathrm{j} + \mathrm{j}^2 = 0 \text{ et } \mathrm{j}^4 = \mathrm{j}.}$

On a $\mathrm{j} = e^{i\frac{2\pi}{3}} = -\dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ et $\mathrm{j}^2 = e^{i\frac{4\pi}{3}} = -\dfrac{1}{2} - i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

Donc $1 + \mathrm{j} + \mathrm{j}^2 = \left(1 - \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2}\right) + i\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2} - \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right) = 0$.

Puis $\mathrm{j}^3 = e^{3i\frac{2\pi}{3}} = e^{2i\pi} = 1$ d'après la formule de Moivre. Donc $\mathrm{j}^4 = \mathrm{j}^3\mathrm{j} = \mathrm{j}$.

4. $\boxed{\text{Démontrer } (\mathrm{j}+1)^{3n} = A + \mathrm{j}B + \mathrm{j}^2 C}$

On applique la formule du binôme de Newton puis on découpe la somme en trois :

$$(\mathrm{j}+1)^{3n} = \sum_{l=0}^{3n} \binom{3n}{l} j^l = \sum_{\substack{l=0 \\ l=0 \bmod 3}}^{3n} \binom{3n}{l} j^l + \sum_{\substack{l=0 \\ l=1 \bmod 3}}^{3n} \binom{3n}{l} j^l + \sum_{\substack{l=0 \\ l=2 \bmod 3}}^{3n} \binom{3n}{l} j^l$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \binom{3n}{3k} j^{3k} + \sum_{k=0}^{n-1} \binom{3n}{3k+1} j^{3k+1} + \sum_{k=0}^{n-1} \binom{3n}{3k+2} j^{3k+2}$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \binom{3n}{3k} + \sum_{k=0}^{n-1} \binom{3n}{3k+1} j + \sum_{k=0}^{n-1} \binom{3n}{3k+2} j^2 \text{ (car } j^{3k+r} = (j^3)^k j^r = 1^k j^r = j^r\text{)}$$

$= A + Bj + Cj^2$.

$\boxed{\text{puis que } (1+\mathrm{j})^{3n} = (-1)^n.}$

On a $1 + j = -j^2$ d'après la question précédente.
Donc $(1+j)^{3n} = (-j^2)^{3n} = (-1)^n (j^3)^{2n} = (-1)^n$ car $j^3 = 1$.

5. $\boxed{\text{En utilisant la partie imaginaire, montrer que } B = C.}$

On sait que $(-1)^n$ est un réel donc sa partie imaginaire est nulle.
Ainsi $0 = \mathrm{Im}\,(j+1)^{3n} = \mathrm{Im}(A + Bj + Cj^2) = B\sqrt{3}/2 - C\sqrt{3}/2$. Donc $B = C$.

6. $\boxed{\text{Déduire des questions précédentes, les valeurs de } A, B \text{ et } C.}$

On dispose des équations $A + B + C = 8^n$, $B = C$ et $A - \dfrac{B}{2} - \dfrac{C}{2} = (-1)^n$ avec la partie réelle.

Donc on obtient le système $\begin{cases} A + 2B & = 8^n \\ A - B & = (-1)^n \end{cases}$.

Il se résout en $A = \dfrac{8^n + 2(-1)^n}{3}$ et $B = \dfrac{8^n - (-1)^n}{3}$.