Devoir Surveillé de Mathématiques n$^{\text{o}}$ 2
le samedi 28 Septembre 2024 - durée 3h

Question de Cours.

1. Enoncer et démontrer l'inégalité triangulaire dans $\mathbb{C}$.
2. Calculer le module et l'argument des nombres complexes :

$$\frac{(6+6\sqrt{3}i)^{2025}}{(6+6i)^{2024}} \text{ et } \frac{e^{ia}-e^{ib}}{e^{ib}+e^{ia}} \text{ avec } a, b \in \mathbb{R}.$$

Exercice 1 : Résoudre sur $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

a) $z^2 - (4+2i)z = -2-4i$.
b) $z^2 + 3z + 3 = i$.
c) $iz^{2n} + 2z^n - 2i = 0$ avec $n \in \mathbb{N}^*$.
d) $(z-2)^4 = (z+3)^4$.

Exercice 2 : Résoudre sur $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

a) $\sqrt{3}\cos(x) + 3\sin(x) = \sqrt{3}$.
b) $\sin(x+\pi/4) = \cos(2x - \pi/3)$.
c) $2\cos^2(x) - 2\sin^2(x) + 2\sqrt{3}\sin(2x) = 0$.

Problème I : On considère les nombres réels $\alpha = \sqrt[3]{2+\sqrt{5}}$ et $\beta = \sqrt[3]{2-\sqrt{5}}$. On recherche une expression plus simple de ces deux nombres.

Rappel : Pour tout $x \in \mathbb{R}$, il existe un unique $y \in \mathbb{R}$ tel que $x = y^3$. On le note $\sqrt[3]{x} = y$.

1. Calculer $\alpha\beta$ et $\alpha^3 + \beta^3$.
2. On note $s = \alpha + \beta$. Montrer que $s^3 = 4 - 3s$.
3. Déterminer les racines de $X^3 + 3X - 4$ et en déduire la valeur de s.
4. En déduire que $\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ et $\beta = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$.

Problème II : On considère un cercle $\mathcal{C}$ de centre Ω et contenant trois points distincts A, B et C. On recherche à démontrer que $(\vec{\Omega A}, \vec{\Omega B}) = 2(\vec{CA}, \vec{CB})$ modulo 2π.

1. Tracer un exemple lorsque $(\vec{\Omega A}, \vec{\Omega B}) = \pi/2$ modulo 2π.
   Tracer un second exemple lorsque $(\vec{CA}, \vec{CB}) = \pi/2$ modulo 2π.
2. On recherche à appliquer plusieurs transformations afin que les affixes soient respectivement $(\Omega, 0), (A, u_1), (B, u_2)$ et $(C, 1)$ avec $u_1, u_2 \in \mathbb{U}$. Préciser quelles translation, homothétie et rotation permettent cette réduction du problème ? Pourquoi démontrer cette version simplifiée permet-elle d'obtenir le résultat général ?
3. Soit $u \in \mathbb{U}$. Montrer que $\frac{(u-1)^2}{u}$ est un réel négatif.
4. En déduire que $(\vec{\Omega A}, \vec{\Omega B}) = 2(\vec{CA}, \vec{CB})$ modulo 2π.

Problème III : Le but de ce problème est de calculer les sommes

$$A = \sum_{k=0}^{n} \binom{3n}{3k}, \quad B = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{3n}{3k+1}, \quad \text{et} \quad C = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{3n}{3k+2}$$

pour tout n entier positif.

1. Calculer les valeurs de A, B et C pour $n = 0, 1$ et 2.
2. Montrer l'égalité $A + B + C = 8^n$.
3. On désigne par j le nombre complexe $e^{i\frac{2\pi}{3}}$.
   Montrer que j satisfait $1 + \mathrm{j} + \mathrm{j}^2 = 0$ et $\mathrm{j}^4 = \mathrm{j}$.
4. Démontrer $(\mathrm{j}+1)^{3n} = A + \mathrm{j}B + \mathrm{j}^2C$ puis que $(1+\mathrm{j})^{3n} = (-1)^n$.
5. En utilisant la partie imaginaire, montrer que $B = C$.
6. Déduire des questions précédentes, les valeurs de A, B et C.