

DM1 : Les fonctions d'une variable réelle
à rendre le jeudi 10 octobre 2024.

Exercice 1 : Considérons $f : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \begin{cases} x^2 - 2x & \text{si } x > 1 \\ \frac{1-2x}{x^2} & \text{sinon.} \end{cases}$

- a) Déterminer $f^*\{0\}$. f est-elle injective ?
- b) Soit g la restriction de f à $]0, 1]$ et h celle à $[1, +\infty[$.
Déterminer une application s telle que $g = h \circ s$.
- c) Calculer $\text{Im}(g) = g(]0, 1])$ et en déduire $\text{Im}(h)$ puis $\text{Im}(f)$.
- d) Montrer que g est une bijection de $]0, 1]$ vers $\text{Im}(g)$ et déterminer sa réciproque.

Notation : Pour une application $f : E \rightarrow F$, on note l'image de l'application :

$$\text{Im}f = f(E) = \{f(x) \text{ pour } x \in E\}.$$

L'image $\text{Im}f \in \mathcal{P}(F)$ est l'ensemble des valeurs atteintes par f .

Exercice 2 : On considère, lorsque cela est possible, la fonction $f(x) = \text{Arcsin}\left(\frac{2x}{1+x^2}\right)$.

- a) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}, \frac{2x}{1+x^2} \in [-1, 1]$.
- b) En déduire le domaine de définition, puis de dérivabilité de f .
- c) Calculer, lorsque cela est possible, $f'(x)$ et préciser les valeurs de $f(0), f(1)$ et $\lim_{+\infty} f$.
- d) En déduire que pour tout $x \in [-1, 1], f(x) = 2\text{Arctan}(x)$.
Déterminer une expression simplifiée de f lorsque $x > 1$ puis lorsque $x < -1$.