DM1 : Corrigé

Exercice 1 : a) On a $f^*\{0\} = \{2, 1/2\}$. En particulier, 2 et 1/2 sont distincts et ont la même image donc f n'est pas injective.

b) On pose $s :]0,1] \to [1, +\infty[x \mapsto 1/x$.
Pour $x \in]0,1]$, on a $h(s(x)) = f(1/x) = (1/x)^2 - 2(1/x) = \frac{1-2x}{x^2} = f(x) = g(x)$.

c) On a $Im(h) = f([1, +\infty[) = [-1, +\infty[$ car $h(1) = -1$ et $\lim_{+\infty} h = +\infty$.
Donc $Im(g) = h \circ s(]0,1]) = \mathrm{Im} h = [-1, +\infty[$.
Puis $Im(f) = Im(g) \cup Im(h) = [-1, +\infty[$.

d) h est une application strictement croissante car $h'(x) = 2(x-1) > 0$ et continue.
D'après le théorème de la bijection continue h est une bijection.
La fonction g est bijective comme étant la composée de h bijective avec s bijective.
Puis $g^{-1}(x)$ est l'unique $y \in]0,1]$ tel que $\frac{1-2y}{y^2} = x$ càd $xy^2 + 2y - 1 = 0$ donc $g^{-1}(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{1+x}-1}{x} \text{ si } x \neq 0 \\ 1/2 \text{ si } x = 0 \end{cases}$.

Exercice 2 : a) Pour $x \in \mathbb{R}$, on a $(x^2+1) - 2x = (x-1)^2 \geq 0$ donc $2x \leq x^2 + 1$ puis $\frac{2x}{x^2+1} \leq 1$.
De même, on a $(x^2+1) + 2x = (x+1)^2 \geq 0$ donc $-2x \leq x^2 + 1$ puis $\frac{2x}{x^2+1} \geq -1$.

b) La fonction Arcsin est définie et continue sur $[-1, 1]$ et dérivable (et même C^∞) sur $]-1, 1[$.
Donc comme composée, Arcsin est définie et continue sur $\mathbb{R}$ à l'aide de a).
On a $\frac{2x}{x^2+1} = 1 \Leftrightarrow x = 1$ et $\frac{2x}{x^2+1} \Leftrightarrow x = -1$. Donc, à priori, f est dérivable uniquement sur $\mathbb{R} - \{1, -1\}$.
Remarque : A ce stade, on ne peut pas dire si f est dérivable ou non en 1 et -1.

c) Pour $x \in \mathbb{R} - \{1, -1\}$. On a $\left(\frac{2x}{x^2+1}\right)' = \frac{2(x^2+1) - 4x^2}{(x^2+1)^2} = 2\frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}$.
Ainsi $f'(x) = u'(x) \times \mathrm{Arcsin}'(u(x))$
$= 2\frac{1-x^2}{(1+x^2)^2} \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{2x}{x^2+1}\right)^2}} = 2\frac{1-x^2}{(1+x^2)^2} \frac{(x^2+1)}{\sqrt{(x^2+1)^2 - 4x^2}}$
$= 2\frac{1-x^2}{(1+x^2)} \frac{1}{\sqrt{(x^2-1)^2}} = 2\frac{1-x^2}{|1-x^2|} \frac{1}{1+x^2}$.
On a $f(0) = \mathrm{Arcsin}(0) = 0$, $f(1) = \mathrm{Arcsin}(1) = \frac{\pi}{2}$ et $\lim_{+\infty} f = \lim_0 \mathrm{Arcsin} = 0$.

d) On remarque que $s(x) = \frac{1-x^2}{|1-x^2|} = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in]-1, 1[\\ -1 & \text{si } x < -1 \text{ ou } x > 1 \end{cases}$ est un signe.
Pour $x \in [-1, 1[$, on a $f'(x) = 2\frac{1}{1+x^2}$ donc $f(x) = 2\mathrm{Arctan}(x) + c$ avec une constante $c = 0$ car $f(0) = 0$. Pour $x > 1$, on a $f'(x) = -2\frac{1}{1+x^2}$ donc $f(x) = -2\mathrm{Arctan}(x) + c$ avec une constante $c = \pi$ car $\lim_{+\infty} f = 0$.
De même pour $x < -1$, on obtient $f(x) = -2\mathrm{Arctan}(x) - \pi$. (On peut remarquer que f est impaire)
Reste à vérifier les valeurs $x = 1$ et $x = -1$ où les expressions sont encore cohérentes.
En conclusion $f(x) = \begin{cases} -\pi - 2\mathrm{Arctan}(x) & \text{si } x < -1 \\ 2\mathrm{Arctan}(x) & \text{si } x \in [-1, 1] \\ \pi - 2\mathrm{Arctan}(x) & \text{si } x > 1 \end{cases}$.