

DM2 : Révision de la Toussaint
à rendre le lundi 4 novembre 2024.

Exercice 1 : Résoudre les équations différentielles suivantes sur l'intervalle I .

1. $y'(t) - 3y(t) = e^t + \sin(2t)$ avec $I = \mathbb{R}$.
2. $t(t+1)y'(t) - (t+2)y(t) = t$ avec $I = \mathbb{R}_+^*$.

Exercice 2 : On considère la fonction $\varphi : x \mapsto \text{Arcsin}(\sin(2x))$.

1. Déterminer la parité, la périodicité et la continuité de la fonction φ sur \mathbb{R} .
2. Déterminer les valeurs de $\varphi(x)$ pour $x \in [0, \pi/4]$ puis pour $x \in [\pi/4, \pi/2]$.
3. Tracer la courbe représentative de φ (échelle : $\pi/4 = 3cm$).

On considère également $f : x \mapsto \text{Arcsin}\left(\frac{2x}{1+x^2}\right)$.

4. Montrer que f est bien définie et continue sur \mathbb{R} .
5. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \varphi(\text{Arctan}(x))$.
6. Sur quel domaine la fonction f est-elle dérivable ? Calculer f' .
7. Montrer que f n'est pas dérivable en 1 et -1 .
8. Tracer la courbe représentative de f (échelle : unité = $3cm$).
On précisera les tangentes obtenues en 0, $\pm\sqrt{3} \approx \pm 1.73$ et $\pm 1/\sqrt{3} \approx \pm 0.57$.