Devoir Surveillé de Mathématiques n° 3
le samedi 19 Octobre 2024 - durée 3h

Exercice 1 : Déterminer sur quels ensembles les fonctions suivantes sont de classe C^∞ puis calculer leurs dérivées premières.

a) $f(x) = \text{Arcsin}\,[2(\ln x) - 1]$
b) $g(x) = \text{Arctan}\,(\sqrt{\text{ch}\,x - 1})$

Exercice 2 : Calculer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la dérivée n-ième des fonctions suivantes :

a) $f(x) = (x^2 - x + 2)e^x$
b) $g(x) = \frac{1}{x^3 - x^2 - x + 1}$
c) $h(x) = \cos^3(x)$

Exercice 3 : Calculer les intégrales suivantes :

a) $I = \int_0^\pi x^2 \cos(2x)\,\mathrm{d}x$
b) $J = \int_0^{\ln 2} \frac{\mathrm{d}x}{1 + \text{ch}\,x}$
c) $K = \int_0^{\pi/4} \frac{\sin x}{\sin^2 x + \cos x + 1}\,\mathrm{d}x$.

Problème I : On définit une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ par $f(x) = \frac{1+ix}{1-ix}$.

1. Justifier que l'application est bien définie.
2. Déterminer si l'application est injective.
3. Déterminer si l'application est surjective.
4. Montrer que $f^*(\mathbb{R}) = \{0\}$.
5. Calculer $f^*(\mathbb{U}_3)$ et $f^*(\mathbb{U}_4)$.
6. Prouver que $f(\mathbb{R}) = \mathbb{U} \setminus \{-1\}$.

Problème II :

1. Montrer que la fonction tangente hyperbolique th : $x \mapsto \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$ réalise une bijection de $\mathbb{R}$ vers $]-1, 1[$. On note Argth sa bijection réciproque.
2. Montrer que Argth une fonction de classe C^∞ sur $]-1, 1[$ et préciser la valeur de $\text{Argth}'(y)$ pour $y \in]-1, 1[$.
3. On note $f(x) = 2\text{Argth}(\tan(x)) - \text{Argth}(\sin 2x)$.
   Etudier le domaine de définition de f. Préciser sa périodicité et sa parité.
4. Calculer $f'(x)$ lorsque cela est possible. En déduire une expression simple de f.

Problème III : On définit $f(x) = x^{\frac{1}{x}}$ si $x > 0$ et $f(0) = 0$.

1. Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et calculer f'.
2. Calculer $\lim_{x \to +\infty} f(x)$. En déduire l'équation d'une asymptote à la courbe de f.
3. Montrer que f est continue en 0. La fonction est-elle dérivable en 0 ?
4. Montrer que f réalise une bijection de $[0, e]$ vers un intervalle que l'on précisera.
5. Sur quel(s) domaine(s) la fonction réciproque f^{-1} est-elle continue ? dérivable ?