DS de Math n^o 3 - Corrigé

Exercice 1 : a) Arcsin est de classe C^∞ sur $]-1,1[$.

On résout $-1 < 2\ln x - 1 < 1$ ssi $0 < \ln x < 2$ ssi $x \in]1, e^2[$.

Donc $f(x) = \text{Arcsin}\,[2(\ln x) - 1]$ est de classe C^∞ sur $]1, e^2[$.

Puis $f'(x) = \dfrac{2}{x}\dfrac{1}{\sqrt{1-(2\ln x - 1)^2}} = \dfrac{1}{x\sqrt{\ln x(1-\ln x)}}$.

b) Arctan est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$. $t \mapsto \sqrt{t}$ est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}_+^*$.

On résout $\operatorname{ch} x - 1 > 0$ ssi $x \neq 0$.

Donc $g(x) = \text{Arctan}\,(\sqrt{\operatorname{ch} x - 1})$ est C^∞ sur $\mathbb{R}^*$.

Puis $g'(x) = \dfrac{\operatorname{sh} x}{2\sqrt{\operatorname{ch} x - 1}}\dfrac{1}{1+\sqrt{\operatorname{ch} x - 1}^2} = \dfrac{\operatorname{sh} x}{2\operatorname{ch} x\sqrt{\operatorname{ch} x - 1}}$.

Exercice 2 : a) La fonction $f(x) = (x^2 - x + 2)e^x$ est de classe C^∞ en tant que produit.

La formule de Leibniz donne $f^{(n)}(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}x^k}(x^2 - x + 2)\frac{\mathrm{d}^{n-k}}{\mathrm{d}x^{n-k}}(e^x)$

$= \left((x^2 - x + 2) + n(2x-1) + \dfrac{n(n-1)}{2}.2\right)e^x$

$= \left(x^2 + (2n-1)x + (n^2 - 2n + 2)\right)e^x$.

b) La fraction rationnelle $g(x) = \dfrac{1}{x^3 - x^2 - x + 1}$ est de classe C^∞ sur $\mathbb{R} - \{-1, 1\}$,

car $x^3 - x^2 - x + 1 = (x-1)(x^2-1) = (x-1)^2(x+1)$.

On écrit $g(x) = \dfrac{1/2}{(x-1)^2} + \dfrac{-1/4}{x-1} + \dfrac{1/4}{x+1}$ décomposé en éléments simples avant de dériver.

Ainsi $g^{(n)}(x) = \dfrac{1}{2}\dfrac{(-1)^n(n+1)!}{(x-1)^{n+2}} - \dfrac{1}{4}\dfrac{(-1)^n n!}{(x-1)^{n+1}} + \dfrac{1}{4}\dfrac{(-1)^n n!}{(x+1)^{n+1}}$

c) Par opération $h(x) = \cos^3(x)$ est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.

On linéarise avant de dériver.

$h(x) = \left(\dfrac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}\right)^3 = \dfrac{1}{8}(e^{3ix} + 3e^{ix} + 3e^{-ix} + e^{-3ix}) = \dfrac{1}{4}\cos(3x) + \dfrac{3}{4}\cos(x)$.

Donc $h^{(n)}(x) = \dfrac{3^n}{4}\cos(3x + n\pi/2) + \dfrac{3}{4}\cos(x + n\pi/2)$.

Exercice 3 : a) On réalise une intégration par partie : $I = \displaystyle\int_0^\pi x^2\cos(2x)\,\mathrm{d}x$

$= \left[x^2\dfrac{\sin(2x)}{2}\right]_0^\pi - \displaystyle\int_0^\pi 2x\frac{\sin(2x)}{2}\,\mathrm{d}x$

$= (0-0) - \left[x\dfrac{-\cos(2x)}{2}\right]_0^\pi + \displaystyle\int_0^\pi \frac{-\cos(2x)}{2}\,\mathrm{d}x$

$= (\dfrac{\pi}{2} - 0) + 0 = \dfrac{\pi}{2}$.

b) On a $J = \displaystyle\int_0^{\ln 2} \frac{\mathrm{d}x}{1+\operatorname{ch} x}$ avec $\operatorname{ch} x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$

$$= \int_0^{\ln 2} \frac{2\,\mathrm{d}x}{2+e^x+e^{-x}} = \int_0^{\ln 2} \frac{2e^x\,\mathrm{d}x}{2e^x+(e^x)^2+1}$$
$= \displaystyle\int_1^2 \frac{2\,\mathrm{d}u}{2u+u^2+1}$ avec le changement de variables $u = e^x$, $\mathrm{d}u = e^x\,\mathrm{d}x$
$$= \int_1^2 \frac{2}{(u+1)^2}\,\mathrm{d}u = \left[\frac{-2}{u+1}\right]_1^2$$
$$= \frac{-2}{3} - \frac{-2}{2} = \frac{1}{3}.$$

c) On réalise le changement de variable $u = \cos t$, $\mathrm{d}u = -\sin t\,\mathrm{d}t$.
$$K = \int_0^{\pi/4} \frac{\sin x}{\sin^2 x + \cos x + 1}\,\mathrm{d}x$$
$$= \int_0^{\pi/4} \frac{1}{(1-\cos^2 x)+\cos x + 1}(-\sin x\,\mathrm{d}x)$$
$$= \int_1^{\sqrt{2}/2} \frac{1}{1-u^2+u+1}\,\mathrm{d}u$$
Or $\dfrac{1}{2+u-u^2} = \dfrac{-1}{(u+1)(u-2)} = \dfrac{1/3}{u+1} + \dfrac{-1/3}{u-2}$.

Donc $K = \left[\dfrac{1}{3}\ln|u+1| - \dfrac{1}{3}\ln|u-2|\right]_1^{\sqrt{2}/2}$
$$= \frac{1}{3}(\ln(\sqrt{2}+2) - \ln(2) - \ln(4-\sqrt{2})).$$

Problème I : 1. Le problème de définition de la fraction est $1 - ix = 0$ c'est à dire $x = -i$. Donc il n'y a pas de valeurs interdites réelles. La fonction est bien définie.

2. Soient $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ tel que $f(x_1) = f(x_2)$ alors $(1+ix_1)(1-ix_2) = (1+ix_2)(1-ix_1)$ en développant et simplifiant on trouve : $2i(x_1 - x_2) = 0$ donc $x_1 = x_2$. L'application est donc injective.

3. On peut résoudre pour $f(x) = 0$ on trouve $1 + ix = 0$ puis $x = i$. Donc 0 n'admet pas d'antécédent réel. L'application n'est pas surjective.

4. En passant aux éléments $x \in f^*(\mathbb{R}) \Leftrightarrow f(x) \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \dfrac{1+ix}{1-ix} \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \dfrac{(1+ix)^2}{1+x^2} \in \mathbb{R}$ $\Leftrightarrow (1-x^2) - 2ix \in \mathbb{R} \Leftrightarrow x = 0$. Ainsi $f^*(\mathbb{R}) = \{0\}$.

5. Pour la suite, on résout de manière générale $f(x) = \omega \in \mathbb{U}$.
Ainsi $\dfrac{1+ix}{1-ix} = \omega \Leftrightarrow (1+ix) = \omega(1-ix) \Leftrightarrow x = -i\dfrac{\omega-1}{\omega+1}$.
Lorsque $\omega = e^{i\theta}$, on obtient avec l'arc moitié : $x = -i\dfrac{e^{i\theta/2}-e^{-i\theta/2}}{e^{i\theta/2}+e^{-i\theta/2}} = \tan(\theta/2)$.
En appliquant ce résultat à $\mathbb{U}_3 = \{e^{0i}, e^{2i\pi/3}, e^{-2i\pi/3}\}$, on trouve :
$f^*(\mathbb{U}_3) = \{\tan(0), \tan(\pi/3), \tan(-\pi/3)\} = \{0, \sqrt{3}, -\sqrt{3}\}$.
Puis pour $\mathbb{U}_4 = \{e^{0i}, e^{i\pi/2}, e^{i\pi}, e^{-i\pi/2}\}$, on trouve :
$f^*(\mathbb{U}_4) = \{\tan(0), \tan(\pi/4), \tan(-\pi/4)\} = \{0, 1, -1\}$
et en particulier l'équation $f(x) = -1$ n'a pas de solution.

6. $\boxed{\supset}$ Pour $\omega = e^{i\theta} \in \mathbb{U} \setminus \{-1\}$, on a $\omega = f(\tan(\theta/2)) \in f(\mathbb{R})$. Donc $\mathbb{U} \setminus \{-1\} \subset f(\mathbb{R})$.
$\boxed{\subset}$ soit $x \in \mathbb{R}$ alors $|f(x)| = \dfrac{|1+ix|}{|1-ix|} = 1$ car $1 - ix = \overline{1+ix}$ et les conjugués ont

même module. D'où $f(x) \in \mathbb{U}$. De plus, on a déjà remarqué que $f(x) \neq -1$. Donc $f(\mathbb{R}) \subset \mathbb{U} \setminus \{-1\}$.

Problème II : 1. La fonction th est C^∞ sur $\mathbb{R}$ et $\mathrm{th}'(x) = \dfrac{1}{\mathrm{ch}^2(x)} > 0$. Donc elle est continue et strictement monotone et ainsi réalise une bijection de $\mathbb{R}$ vers $\mathrm{th}(\mathbb{R})$.

De plus les limites $\mathrm{th}(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \to_{x\to-\infty} -1$ et $\mathrm{th}(x) \to_{x\to+\infty} 1$. Donc $\mathrm{th}(\mathbb{R}) =]-1, 1[$.

2. La fonction th est de classe C^∞ et sa dérivée première th$'$ ne s'annule pas donc par théorème sa bijection réciproque est de classe C^∞ sur $]-1, 1[$. De plus en posant $y = \mathrm{th}\, x$, on obtient $\mathrm{Argth}'(y) = \dfrac{1}{\mathrm{th}'(x)} = \dfrac{1}{1 - \mathrm{th}^2(x)} = \dfrac{1}{1 - y^2}$
3. On résout $\tan x \in]-1, 1[$ ssi $x \in]-\pi/4, \pi/4[+\pi\mathbb{Z}$.
Et $\sin(2x) \in]-1, 1[$ ssi $2x \in]-\pi/2, \pi/2[+\pi\mathbb{Z}$ ssi $x \in]-\pi/4, \pi/4[+(\pi/2)\mathbb{Z}$.
Donc la fonction f est définie et dérivable sur le domaine le plus petit $]-\pi/4, \pi/4[+\pi\mathbb{Z}$.
On a $\mathrm{th}(-x) = -\mathrm{th}(x)$ donc $\mathrm{Argth}(-y) = -\mathrm{Argth}(y)$ est aussi impaire.
Puis $f(-x) = 2\mathrm{Argth}(\tan(-x)) - \mathrm{Argth}(\sin(-2x)) = ... = -f(x)$ car toutes les fonctions sont impaires. Ainsi f est également impaire.
Puis $f(x+\pi) = 2\mathrm{Argth}(\tan(x+\pi)) - \mathrm{Argth}(\sin(2(x+\pi)) = f(x)$ car $\tan(x+\pi) = \tan(x)$ et $\sin(2x + 2\pi) = \sin(2x)$. Donc f est π-périodique.
4. Pour $x \in]-\pi/4, \pi/4[$, on peut calculer $f'(x) = \dfrac{2}{\cos^2(x)} \dfrac{1}{1 - \tan^2(x)} - \dfrac{2\cos(2x)}{1 - \sin^2(2x)}$
$= \dfrac{2}{\cos^2(x) - \sin^2(x)} - \dfrac{2\cos(2x)}{\cos^2(2x)} = 0.$
Effet $\cos(2x) = \cos^2(x) - \sin^2(x)$.
Donc f est constante sur l'intervalle $]-\pi/4, \pi/4[$. Or $f(0) = 0$ car f est impaire. Donc $f(x) = 0$ sur l'intervalle. Puis par périodicité f est nulle sur tout son ensemble de définition.
Ainsi $\boxed{\mathrm{Argth}(\sin(2x)) = 2\mathrm{Argth}(\tan x)}$ pour tout $x \in]-\pi/4, \pi/4[+\pi\mathbb{Z}$.

Problème III : 1. Pour $x > 0$, on peut écrire $f(x) = \exp\left(\dfrac{1}{x}\ln(x)\right)$.
Les fonctions sont bien C^∞ sur $\mathbb{R}_+^*$ et on a :
$f'(x) = \dfrac{x/x - 1.\ln(x)}{x^2} \exp\left(\dfrac{\ln(x)}{x}\right) = \dfrac{1 - \ln(x)}{x^2} x^{1/x}$.
2. . On a $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\ln(x)}{x} = 0$ donc en passant à l'exponentielle (continue) on trouve $\lim\limits_{+\infty} f = e^0 = 1$. Ainsi il existe une asymptote horizontale d'équation $y = 1$.
3. On a $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(x)}{x} = -\infty$ donc $\lim\limits_{0} f = \lim\limits_{-\infty} \exp = 0$. Donc f se prolonge par continuité en 0 en posant $f(0) = 0$.
On a $\dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \exp(\dfrac{\ln x}{x} - 1) \to_{x\to 0} 0$ car $\dfrac{\ln x}{x} - 1 \to_{x\to 0} -\infty$ donc la fonction f est dérivable en 0 et $f'(0) = 0$.
4. On étudie le signe de f' il dépend que du signe de $(1 - \ln(x))$ car $\dfrac{1}{x^2} x^{1/x} > 0$ pour

$x > 0$. Donc la fonction est strictement croissante sur $[0, e]$ et strictement décroissante sur $[e, +\infty[$. De plus f est continue sur $[0, e]$ donc d'après le théorème de la bijection : $f : [0, e] \to [f(0), f(e)]$ est bijective. On a $[f(0), f(e)] = [0, e^{1/e}]$.

5. Le théorème de la bijection ajoute que f^{-1} est continue sur $[0, e^{1/e}]$. La dérivabilité dépend de l'annulation de $f'(x) = (1 - \ln(x))x^{1/x-2}$. La seule racine est e et f n'est pas dérivable en 0. Donc f^{-1} est dérivable sur $]0, e^{1/e}[$ mais pas en $e^{1/e}$.

   Bonus : On peut démontrer que f^{-1} est dérivable en 0 car $\lim\limits_{y\to 0}(f^{-1})'(y) = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{f'(x)} = 0$.