TD6 : Limite et continuité - Corrigé

6.1 Continuité sur des fonctions explicites

Exercice 1

Indication :

On doit démontrer que $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$.

C'est à dire $\boxed{\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x \in I, |x-a| \leq \eta \Rightarrow |f(x) - f(a)| \leq \varepsilon.}$

La rédaction suit donc le format suivant :

Soit $\varepsilon > 0$.
On pose $\eta = ... > 0$. (*la difficulté est de trouver la valeur adaptée*)
Soit $x \in I$. On suppose que $|x - a| \leq \eta$.
On a $|f(x) - f(a)| = ... \leq ... \leq \varepsilon$ (*par un calcul en utilisant l'hypothèse*)

Solution :

1) Soit $\varepsilon > 0$. On recherche $\eta > 0$.
Soit $x \in \mathbb{R}$ tel que $|x-1| \leq \eta$.
On a $|x^2 - 1^2| = |x+1||x-1| \leq |x+1|\eta$.
Or si $\eta \leq 1$ alors $x \in [0, 2]$ alors $|x+1| \leq 3$.
On pose $\eta = \min(1, \varepsilon/3)$. Ainsi $|x+1|\eta \leq 3\eta \leq \varepsilon$ convient à la définition.

2) Soit $\varepsilon > 0$. On recherche $\eta > 0$.
Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $|x-3| \leq \eta$. On a $|1/x - 1/3| = \frac{|3-x|}{3x} \leq \frac{\eta}{3x}$.
Or si $\eta \leq 1$ alors $x \in [2, 4]$ alors $\frac{1}{3x} \leq \frac{1}{6}$.
On pose $\eta = \min(1, 6\varepsilon)$. Ainsi $\frac{\eta}{3x} \leq \eta/6 \leq \varepsilon$ convient à la définition.

3) Soit $\varepsilon > 0$. On recherche $\eta > 0$.
Soit $x \in \mathbb{R}_+$ tel que $|x-2| \leq \eta$. On a $|\sqrt{x} - \sqrt{2}| = \frac{x-2}{\sqrt{x}+\sqrt{2}} \leq \frac{\eta}{\sqrt{2}}$.
On pose $\eta = \sqrt{2}\varepsilon$. Ainsi $\frac{\eta}{\sqrt{2}} \leq \varepsilon$ convient à la définition.

Exercice 2

Indication :

On utilise les limites à droite et à gauche de la fonction partie entière. Elle est continue sur $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ et pour $n \in \mathbb{Z}$, $\boxed{\lim_{x\to n^+} \lfloor x \rfloor = n \text{ et } \lim_{x\to n^-} \lfloor x \rfloor = n-1}$

Solution :

a) La fonction F est continue sur $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ car la fonction partie entière l'est.
La fonction F admet des limites à droite et à gauche en tout point entier $n \in \mathbb{Z}$.
Et $\lim_{n^+} F = n - n = 0$, $F(n) = n - n = 0$ et $\lim_{n^-} F = n - (n-1) = 1$.
Donc la fonction est continue à droite mais pas à gauche.

b) Notons $A = \{1/n \text{ pour } n \in \mathbb{Z}^*\}$. La fonction $inv : t \mapsto 1/t$ est continue sur $\mathbb{R}^* \setminus A$ à valeurs dans $\mathbb{R}^* \setminus f(A) = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$. La fonction $E : t \mapsto \lfloor t \rfloor$ est continue sur $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$. Donc par composée f est continue sur $\mathbb{R}^* \setminus A$.
Soit $n \in \mathbb{Z}^*$ de sorte que $a = 1/n \in A$ est notre point d'étude. On a $f(a) = aE(n) = an = 1$.
On a $\lim_{x\to a^+}(1/x) = (1/a)^- = n^-$ et $\lim_{n^-} E = n-1$. Donc $\lim_{a^+} f = a(n-1) = 1-1/n$.
De même $\lim_{x\to a^-}(1/x) = (1/a)^+ = n^+$ et $\lim_{n^+} E = n$. Donc $\lim_{a^-} f = an = 1$.
Ainsi f est n'est pas continue en a (car C^0 à gauche mais pas à droite).

c) On dispose de l'encadrement $y - 1 \leq E(y) \leq y \leq E(y) + 1$ pour $y \in \mathbb{R}$.
Donc pour $y = 1/x$, on obtient $1/x - 1 \leq E(1/x) \leq 1/x$.
Lorsque $x > 0$, par produit, on trouve $1 - x \leq f(x) \leq 1$ et lorsque $x \to 0^+$, on obtient $\lim_{0^+} f = 1$ par théorème d'encadrement.
De même, lorsque $x < 0$, on trouve $1 - x \geq f(x) \geq 1$ et lorsque $x \to 0^-$, on obtient également $\lim_{0^-} f = 1$.
Donc la limite existe et est finie en $x = 0$ et la fonction se prolonge par continuité en posant $f(0) = \lim_0 f = 1$.

Exercice 3

Indication :

Pour montrer qu'une fonction n'a pas de limite en un point $a \in I$, on peut utiliser la caractérisation séquentielle. On construit deux suites (u_n) et (v_n) d'éléments de I qui tendent vers a telles que $f(u_n) \to l_1$ et $f(v_n) \to l_2$ sont des valeurs d'adhérences différentes $l_1 \neq l_2$.

Solution :

On suppose par l'absurde que f admet une limite en 0. On la note $l \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$.
On introduit les suites $u_n = \frac{1}{2n\pi}$ et $v_n = \frac{1}{\pi/2+2n\pi}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.
On a $u_n \to 0$ et $v_n \to 0$ donc $f(u_n) \to l$ et $f(v_n) \to l$.
Or $f(u_n) = \sin(2n\pi) = 0 \to 0$ et $f(v_n) = \sin(\pi/2 + 2n\pi) = 1 \to 1$.
Donc $0 = l = 1$ par unicité de la limite. Ce qui est absurde.

Pour $x \in \mathbb{R}^*$, on a $\sin(1/x) \in [-1, 1]$ donc on en déduit l'encadrement :
$0 \leq |g(x)| = |x \sin(1/x)| \leq [x| \to_{x\to 0} 0$.
Par théorème d'encadrement, $\lim_0 g = 0$. La fonction se prolonge par continuité avec $g(0) = 0$.

Exercice 4

Indication :

Par opération, on détermine le domaine naturel de continuité. Puis on étudie les limites aux bords de ce domaine. La fonction valeur absolue est définie par une disjonction, il est donc utile de distinguer les limites à gauche et à droite.

Solution :

La fonction $f(x) = x\left|1 + \frac{1}{x}\right|$ est définie et continue sur $\mathbb{R}^*$ par opérations.

Il reste à étudier la fonction f au voisinage de $x = 0$.
Pour $x > 0$, on a $f(x) = x(1 + 1/x) = x + 1 \to_{x\to 0^+} 1$.
Pour $x \in]-1, 0[$, on a $f(x) = x\frac{|x+1|}{|x|} = x\frac{x+1}{-x} = -x - 1 \to_{x\to 0^-} -1$.
Donc f n'admet pas de limite en 0 et ne se prolonge pas par continuité.

La fonction $g(x) = \frac{x^2+|x|}{x^2-|x|}$ est définie et continue sur $\mathbb{R} - \{-1, 0, 1\}$ par opérations.

Etude locale en $x = 0$: Pour $x \in]0, 1[$, on a $g(x) = \frac{x^2+x}{x^2-x} = \frac{x+1}{x-1} \to_{x\to 0^+} -1$.
Pour $x \in]-1, 0[$, on a $g(x)\frac{x^2-x}{x^2+x} = \frac{x-1}{x+1} \to_{x\to 0^-} -1$.
Donc $\lim_0 g = -1$ et g se prolonge par continuité en posant $g(0) = -1$.

Etude locale en $x = 1$: Pour $x \in \mathbb{R}_+ - \{1\}$, on a $g(x) = \frac{x+1}{x-1} \to \pm\infty$.
Elle n'admet pas de limite finie donc g ne se prolonge pas par continuité en 1.

Etude locale en $x = -1$: De même on trouve $g(x) \to_{x\to -1} \pm\infty$.
Il n'y a pas de prolongement pas continuité en -1.

6.2 Continuité sur des fonctions abstraites

Exercice 5

Indication :

Il s'agit de démontrer des propriétés en revisitant la construire des nombres :
a) On part de $x = 0$.
b) Par récurrence, on construit les entiers naturels $\mathbb{N}$.
Par parité, on en déduit les entiers relatifs $\mathbb{Z}$.
c) Par quotient $r = \frac{p}{q}$ avec $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{N}^*$, on obtient les rationnels $\mathbb{Q}$.
d) Par passage à la limite $r_n \in \mathbb{Q} \to x \in \mathbb{R}$, on obtient les réels $\mathbb{R}$.

Solution :

a) On pose $x = y = 0$, on a $2f(0) = 4f(0)$ donc $f(0) = 0$.
Soit $t \in \mathbb{R}$. On pose $x = 0$ et $y = t$.
On a $f(t) + f(-t) = 2(f(0) + f(t))$ donc $f(-t) = f(t)$.
Ainsi la fonction est paire par définition.

b) Soit $x \in \mathbb{R}$. On montre par récurrence double sur $n \in \mathbb{N}, f(nx) = n^2 f(x)$.
Initialisation : Pour $n = 0$, on a $f(0x) = 0 = 0^2 f(x)$
Pour $n = 1$, on a $f(1x) = f(x) = 1^2 f(x)$.

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $f(nx) = n^2 f(x)$ et $f((n+1)x) = (n+1)^2 f(x)$.
On a $f((n+2)x) = f((n+1)x + x) + f((n+1)x - x) - f(nx)$
$= 2(f((n+1)x) + f(x)) - f(nx)$
$= [2((n+1)^2 + 1) - n^2] f(x)$
$= [n^2 + 4n + 4] f(x)$
$= (n+2)^2 f(x)$.
Par parité, on a également $f(-nx) = f(nx) = n^2 f(x) = (-n)^2 f(x)$.
Donc la propriété est vraie pour $n \in \mathbb{Z}$.

c) Soit $r = p/q \in \mathbb{Q}$ avec $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{N}^*$.
On a $f(qrx) = q^2 f(rx)$ car $q \in \mathbb{Z}$.
Et $f(qrx) = f(px) = p^2 f(x)$ car $p \in \mathbb{Z}$.
Donc $q^2 f(rx) = p^2 f(x)$ montre bien $f(rx) = \frac{p^2}{q^2} f(x) = r^2 f(x)$.

d) L'ensemble des rationnelles est dense dans $\mathbb{R}$.
Donc pour $x \in \mathbb{R}$, il existe une suite de rationnelle $x_n \to x$.
Puis $f(x_n) \to f(x)$ par continuité de f.
Et comme $x_n \in \mathbb{Q}$ alors $f(x_n) = x_n^2 f(1) \to x^2 f(1)$.
Ainsi $f(x) = x^2 f(1)$ par unicité de la limite.

Exercice 6

Indication :

a) Montrer que f est constante égale à $\lim_{+\infty} f$.

b) Utiliser le théorème de la borne atteinte sur $[0, T]$.

c) Si T_1 et T_2 sont des périodes alors $n_1 T_1 + n_2 T_2$ est encore une période pour tout $n_1, n_2 \in \mathbb{Z}$. On montre que l'ensemble des périodes $E = \{a + b\sqrt{2} \text{ pour } a, b \in \mathbb{Z}\}$ est dense dans $\mathbb{R}$. On conclut par continuité de f.

Solution :

a) On suppose que $\lim_{+\infty} f = l \in \mathbb{R}$ est finie. Soit $x \in \mathbb{R}$ et $x_n = x + nT$. On a $x_n \to +\infty$ donc en composant les limites, on obtient $f(x_n) \to l$. Or $f(x_n) = f(x)$ par périodicité. Donc $f(x) = l$ et la fonction est constante.

b) On suppose f continue sur le segment $[0, T]$. D'après le thm des bornes atteintes, la fonction est bornée sur $[0, T]$ i.e. il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que $\forall x \in [0, T], |f(x)| \leq M$.
Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose $n = \lfloor x/T \rfloor$. On a $x - nT \in [0, T]$ donc $|f(x)| = |f(x - nT)| \leq M$.
La fonction est bornée sur $\mathbb{R}$.

c) On montre que $E = \{a + b\sqrt{2} \text{ pour } a, b \in \mathbb{Z}\}$ est dense dans $\mathbb{R}$. On note $\alpha_n = (\sqrt{2} - 1)^n > 0$.
On a $\alpha_n \to 0$ car $\sqrt{2} - 1 \in]0, 1[$ et $\alpha_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k \sqrt{2}^{n-k} \in E$.
Pour $x \in \mathbb{R}$, on peut considérer l'approximation dans E à α_n près. En posant $x_n = \lfloor x/\alpha_n \rfloor \alpha_n \in E$ vérifiant $x_n \leq x \leq x_n + \alpha_n$. Donc, par encadrement, $x_n \to x$ puis $f(x_n) \to f(x)$ par continuité.
Or $f(x_n) = f(a_n + b_n\sqrt{2}) = f(0)$ car $x_n \in E$ et f périodique. Donc par unicité de la limite, on trouve $f(x) = f(0)$ c'est à dire la fonction est constante.

Exercice 7

Indication :

a) On raisonne par l'absurde et on trouve une contradiction en appliquant le Théorème des Valeurs Intermédiaires.

b) On raisonne par l'absurde et on utilise le théorème de la limite monotone pour faire un apparaître une valeur λ non atteinte par la fonction.

Solution :

a) On suppose f continue et injective sur $[0, 1]$.
Quitte à remplacer f par $-f$, on peut supposer $f(0) < f(1)$.
Soit $a, b \in [0, 1]$ tel que $a < b$.
On suppose par l'absurde que $f(a) \geq f(b)$.

On a $a \neq b$ donc $f(a) \neq f(b)$ par injectivité et de même $f(0) \neq f(b)$.
Si $f(b) > f(0)$ alors $f(b) \in]f(0), f(a)[$ et il existe $c \in]0, a[$ tel que $f(c) = f(b)$ et $c \neq b$.
Si $f(b) < f(0)$ alors $f(0) \in]f(a), f(b)[$ et il existe $c \in]a, b[$ tel que $f(c) = f(0)$ et $c \neq 0$.
Dans les deux cas, cela contredit l'injectivité. Absurde. Donc f est strictement croissante.

b) On suppose f monotone (disons croissante) sur $[0,1]$ et non continue en $c \in [0,1]$. Par le théorème de la limite monotone, les limites partielles existent et $\lim_{c^-} f \leq f(c) \leq \lim_{c^+} f$. La discontinuité en c impose qu'une des inégalités est stricte, disons $f(c) < \lim_{c^+} f$.
Donc on a par monotonie $f([0,c]) \subset [f(0), f(c)]$ et $f(]c,1]) \subset]\lim_{c^+} f, f(1)]$.
Ainsi $f([0,1]) = f([0,c]) \cup f(]c,1]) \subset [f(0), f(1)] \backslash]f(c), \lim_{c^+} f]$.
En particulier $\lambda = \lim_{c^+} f \in [f(0), f(1)]$ mais $\lambda \notin f([0,1])$.
Ce contredit l'hypothèse $[f(0), f(1)] \subset f([0,1])$.

6.3 Utilisation des théorème sur la continuité

Exercice 8

__Indication :__

On résout ponctuellement l'équation. Puis la continuité de la fonction impose une compatibilité des solutions. On utilise pour cela le TVI.

__Solution :__

a) L'équation $f(x)^2 = 1$ se résout en $f(x) \in \{-1, 1\}$. Si par l'absurde f n'est pas constante alors il existe $c, d \in [a,b]$ tel que $f(c) = -1$ et $f(d) = 1$.
Or $0 \in [-1,1] = [f(c), f(d)]$ et f est continue sur $[a,b]$. Donc d'après le TVI, il existe $\alpha \in [a,b]$ tel que $f(\alpha) = 0 \notin \{-1,1\}$ ce qui est absurde.

b) On pose $g(x) = \frac{f(x)}{\sqrt{1+x^2}}$ la fonction g est définie et continue sur $\mathbb{R}$ et vérifie $g^2 = 1$. Donc d'après a), on a $g = 1$ ou $g = -1$ est une fonction constante. Ainsi il y a deux solutions : $x \mapsto \sqrt{1+x^2}$ et $x \mapsto -\sqrt{1+x^2}$.

c) On pose $g(x) = \frac{f(x)}{x}$. La fonction g est continue sur $\mathbb{R}^*$ et vérifie $g^2 = 1$. Donc g est une constante sur chacun des intervalles i.e. $g|_{]-\infty,0[} = c_1$ et $g|_{]0,+\infty[} = c_2$ avec $c_1, c_2 \in \{-1, +1\}$. De plus $f(0) = 0$ car $f(0)^2 = 0$ par hypothèse.
Donc il y a 4 solutions de la forme $x \mapsto \begin{cases} c_1 x & \text{si } x \leq 0 \\ c_2 x & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$.
C'est à dire les fonctions $x \mapsto x, \quad x \mapsto -x, \quad x \mapsto |x|$ et $x \mapsto -|x|$.

Exercice 9

__Indication :__

On applique le théorème de la limite monotone à f et à g. Par antisymétrie, on trouve que les limites à gauche et à droite sont identiques.

__Solution :__

Soit $c > 0$. On peut utiliser le théorème de limite monotone sur f et g.
Elle admettent des limites à droite et à gauche vérifiant :
$\boxed{\lim_{c^-} f \leq f(c) \leq \lim_{c^+} f}$ et $\boxed{\lim_{c^-} g \geq g(c) \geq \lim_{c^+} g}$.
Or $f(x) = xg(x)$ donc $\lim_{c^+} f = c \lim_{c^+} g$ et $\lim_{c^-} f = c \lim_{c^-} g$ par opération.
Ainsi on a $c \lim_{c^-} g \leq cg(c) \leq c \lim_{c^+} g$ démontrant $\lim_{c^-} g \leq g(c) \leq \lim_{c^+} g$ car $c > 0$.
Ainsi $\lim_{c^-} g = g(c) = \lim_{c^+} g$ par antisymétrie. La fonction g est donc continue en c.

Exercice 10

__Indication :__

On applique le théorème de la borne atteinte sur une fonction auxiliaire C^0 sur le segment.

__Solution :__

a) On pose $h(x) = g(x) - f(x)$. La fonction est continue sur le segment $[a,b]$ donc atteint un minimum en $c \in [a,b]$. Donc pour tout $x \in [a,b], h(x) \geq h(c) = g(c) - f(c) > 0$.
On pose $m = g(c) - f(c) > 0$ qui convient à la propriété.

b) On pose $h(x) = g(x)/f(x)$. La fonction est continue car f ne s'annule pas. Elle atteint un minimum en $c \in [a, b]$. En posant $M = h(c) = g(c)/f(c)$, on a pour tout $x \in [a, b], h(x) \geq M$ puis $g(x) \geq Mf(x)$.

Exercice 11

Indication :

On introduit $g(x) = f(x) - x$ et on recherche à lui appliquer le TVI.

Solution :

On introduit $g(x) = f(x) - x$. La fonction g est continue sur $\mathbb{R}$.
On a f bornée et $\lim_{+\infty} -x = -\infty$ donc $\lim_{+\infty} g = -\infty$.
De même $\lim_{-\infty} g = +\infty$. Or $0 \in]-\infty, +\infty[= g(\mathbb{R})$.
Ainsi d'après le TVI, il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que $g(c) = 0$ c'est à dire $f(c) = c$.

Exercice 12

Indication :

On recherche à appliquer le TVI à la fonction $h = g - f$. Le théorème de la borne atteinte appliquée à f et g permet l'intervalle sur lequel appliquer le TVI.

Solution : Les fonctions sont continues sur un segment.
D'après le théorème de la borne atteinte, il existe $\alpha, \beta \in [a, b]$ tel que $f(\alpha) = \sup_I f$ et $g(\beta) = \sup_I g$.
On introduit $h(x) = g(x) - f(x)$ une fonction continue sur I.

On a $h(\alpha) = g(\alpha) - f(\alpha) = g(\alpha) - \sup_I f = g(\alpha) - \sup_I g \leq 0$.

De même $h(\beta) = g(\beta) - f(\beta) = \sup_I f - f(\beta) \geq 0$.

Donc $0 \in [h(\alpha), h(\beta)]$ et d'après le TVI il existe $c \in I$ tel que $h(c) = 0$ c'est à dire $f(c) = g(c)$.