TD8 : Calcul matriciel

8.1 Algèbre des matrices

Exercice 1 ($\star$) On considère les matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 1 & 9 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 3 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } E = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

a) Faire les sommes, lorsque cela est possible, de chaque paire de matrices.

b) Faire les produits, lorsque cela est possible, de chaque paire de matrices.

c) Calculer $(B - D)E(A + 3C)$.

Exercice 2 ($\star$) Soit $M = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 2 \\ -2 & 5 & 4 \\ 1 & -5 & -4 \end{pmatrix}$.

a) Calculer M^2 et M^3.

b) Calculer $M^3 + 2M^2 - M - 2I$.

c) Montrer que M est inversible et calculer son inverse.

8.2 Calcul de puissances

Exercice 3 ($\star$) On considère les matrices suivantes :

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix} \text{ pour } a, b \in \mathbb{R}^* \text{ et } A_3 = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \text{ pour } \theta \in \mathbb{R}.$$

a) Pour chacune des matrices calculer les puissances A^n pour $n \in \mathbb{N}$.

b) Montrer qu'elles sont inversibles et calculer A^n pour $n < 0$.

Exercice 4 ($\star$) Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

a) En écrivant, $A = I_3 + B$ donner une expression de A^n pour $n \in \mathbb{N}$.

b) Montrer que A est inversible et calculer A^n pour $n < 0$.

Exercice 5 ($\star$) On pose $A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 2 \\ 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ et $J = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

a) Déterminer des réels a et b tels que $A = aI_3 + bJ$.

b) Calculer J^2. En déduire que J est inversible et calculer son inverse.

c) En déduire la valeur de A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 6 ($\star$) Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 6 & -5 & 6 \\ 3 & -3 & 4 \end{pmatrix}$.

a) Montrer qu'il existe une suite de réels $(a_n)_{n\geq 0}$ telle que :

$$\text{pour tout } n \in \mathbb{N},\ A^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2a_n & 1-2a_n & 2a_n \\ a_n & -a_n & 1+a_n \end{pmatrix}.$$

b) Montrer que la suite $(a_n)_{n\geq 0}$ est arithmético-géométrique.

c) En déduire le calcul de A^n en fonction de n.

Exercice 7 ($\star\star$) Pour tout réel $x \in \mathbb{R}$, considérons la matrice $M(x) = \begin{pmatrix} x & 1 & 1 \\ 1 & x & 1 \\ 1 & 1 & x \end{pmatrix}$.

a) Calculer $M(x)^2$ et déterminer des réels a, b tels que : $M(x)^2 = aM(x) + bI_3$.

b) En déduire à quelle condition sur x la matrice $M(x)$ est inversible.

c) Montrer qu'il existe deux suites de réels $(a_n)_{n\geq 0}$ et $(b_n)_{n\geq 0}$ tels que : $M(x)^n = a_n M(x) + b_n I_3$ pour tout entier $n \in \mathbb{N}$.

d) Montrer que $(a_n)_{n\geq 0}$ est une suite récurrente d'ordre 2.

e) En déduire une expression explicite de $M(3)^n$ pour tout entier $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 8 ($\star\star$) Définissons deux suites par leurs premiers termes $(u_0, v_0) \in \mathbb{R}^2$ et les relations :

$$\text{pour tout entier } n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = 4u_n - v_n \text{ et } v_{n+1} = u_n + 2v_n.$$

a) Montrer qu'il existe une matrice $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ vérifiant :

$$\text{pour tout entier } n \in \mathbb{N}, \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ v_{n+1} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}.$$

b) Déterminer une matrice N tel que $A = 3I_2 + N$ puis calculer N^2.

c) En déduire le calcul A^n pour tout entier $n \in \mathbb{N}$.

d) Déterminer une expression explicite des suites $(u_n)_{n\geq 0}$ et $(v_n)_{n\geq 0}$.

Exercice 9 ($\star$) Calculer les puissances successives de $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & i \\ i & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$.
Déterminer si A est inversible.

Exercice 10 ($\star\star$) Soient u, v et w des suites déterminées par leurs premiers termes $u_0 = v_0 \geq 0$ et $w_0 = 1$ et les relations de récurrence pour $n \geq 0$:

$$u_{n+1} = \frac{3u_n+2}{u_n+2}, \quad v_{n+1} = 3v_n + 2w_n \text{ et } w_{n+1} = v_n + 2w_n.$$

a) Montrer que pour tout $n \geq 0, u_n = \frac{v_n}{w_n}$.

b) Soient $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, $P = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$.
Montrer que pour tout $n \geq 0$, $\begin{pmatrix} v_{n+1} \\ w_{n+1} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} v_n \\ w_n \end{pmatrix}$ puis $\begin{pmatrix} v_n \\ w_n \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} v_0 \\ w_0 \end{pmatrix}$.

c) Montrer que P est inversible et calculer PDP^{-1}.

d) Calculer A^n et en déduire une expression de v_n et w_n et en déduire $\lim_{n\to+\infty} u_n$.

Exercice 11 ($\star\star$) Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

a) Montrer que A est inversible et calculer A^{-1}.

b) Calculer $(A - 6I_3)(A^2 - 3I_3)$. Donner une expression polynomiale de A^{-1}.

c) Calculer A^n pour tout $n \in \mathbb{Z}$.

8.3 Systèmes linéaires

Exercice 12 ($\star$) soit $\alpha, a, b \in \mathbb{R}$ des paramètres. Résoudre les systèmes

a) $\begin{cases} x + \alpha y = a \\ \alpha x + y = b \end{cases}$

b) $\begin{cases} x + y = a \\ x + 2y = b \\ x + 3y = c \end{cases}$

c) $\begin{cases} x - y + z = 1 \\ x + 2y - z = -2 \\ x - 3y + 3z = 2 \end{cases}$

d) $\begin{cases} x + 2y + z = 0 \\ 2x + y + 2z = 0 \end{cases}$

e) $\begin{cases} x + -y + z = 0 \\ -x + y + -z = 0 \end{cases}$

f) $\begin{cases} x + \alpha y + z = 0 \\ \alpha x + y + \alpha z = 0 \end{cases}$

g) $\begin{cases} x + y + \alpha z = 0 \\ x + \alpha y + z = 0 \\ \alpha x + y + z = 0 \end{cases}$

h) $\begin{cases} ax + by + z = 0 \\ x + aby + z = 0 \\ x + by + az = 0\,. \end{cases}$

8.4 Rang et inverse des matrices

Exercice 13 ($\star$) Calculer les rangs des matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 4 \\ 5 & -1 & 1 & -2 \\ -1 & 2 & -3 & 7 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 2 & 4 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } D = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 14 ($\star$) Calculer les inverses des matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 6 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \\ -3 & -6 & 0 & -1 \\ 0 & 4 & 8 & 1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 15 ($\star$) On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

a) Soient $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$.
Calculer AB et AC. A est-elle inversible ?

b) Déterminer toutes les matrices F telles que $AF = 0_n$.