TD7 : Dérivabilité

Exercice 1 ($\star$) Soit la fonction f définie par $f(x) = x + \ln(x)$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

a) Montrer que f réalise une bijection de $\mathbb{R}_+^*$ vers $\mathbb{R}$.

b) Pour quel point $a \in \mathbb{R}$, la réciproque f^{-1} est-elle continue, dérivable en a.

Exercice 2 ($\star$) Montrer que $f(t) = \frac{t}{1-e^{-t}}$ réalise une bijection entre des intervalles que l'on déterminera. Etudier la continuité et dérivabilité de la réciproque.

Exercice 3 ($\star$) Soit f une fonction définie dans un voisinage de $a \in \mathbb{R}$ et dérivable en a. Calculer :

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(a+h) - f(a-h)}{2h} \quad \text{et} \quad \lim_{x\to a} \frac{af(x) - xf(a)}{x-a}.$$

Exercice 4 ($\star$) Soit f définie par $f(t) = (1-t)\sqrt{1-t^2}$. Déterminer les domaines sur laquelle la fonction f est définie, continue puis dérivable. Calculer lorsque cela est possible la dérivée de f.

Exercice 5 ($\star\star$) Soit f définie sur un intervalle I voisinage de 0. On suppose que f est continue et dérivable en 0 et telle que :

$$\text{pour tout } x, y \in I, f(x+y) = \tfrac{f(x)+f(y)}{1-f(x)f(y)}.$$

a) Calculer $f(0)$. Montrer qu'il existe un intervalle $]-a, a[$ tel que $|f(x)| < \frac{1}{2}$.

b) Montrer que f est continue sur $]-a, a[$.

c) Montrer que f est dérivable sur $]-a, a[$ et calculer sa dérivée.

d) En déduire la fonction f.

7.1 Théorème des accroissements finis

Exercice 6 ($\star\star$) (Règle de l'Hôpital) Soit I un intervalle et $a \in I$. Soient f et g deux fonctions dérivables sur I tels que $f(a) = g(a) = 0$ et g' ne s'annule pas sur $I \setminus \{a\}$.

a) Soit $x > a$. Montrer qu'il existe $c(x) \in]a, x[$ tel que $f'(c(x))g(x) = g'(c(x))f(x)$.

b) Montrer que g ne s'annule pas sur $I \setminus \{a\}$.

c) On suppose que $\lim_a f'/g'$ existe. Montrer que la $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$.

Exercice 7 ($\star\star$) Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^2. On suppose que $f'(a) = f'(b) = 0$. Montrer que :

$$|f(b) - f(a)| \leq \frac{(b-a)^2}{2} \sup_{x\in[a,b]} |f''(x)|.$$

Exercice 8 ($\star\star$) Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1. On suppose que $f(a) = 0$ et $f(b)f'(b) < 0$. Montrer qu'il existe $c \in]a, b[$ tel que $f'(c) = 0$.

Exercice 9 ($\star\star$) Soit $f : [0,1] \to [0,1]$ une fonction dérivable non constante telle que $f \circ f = f$. Montrer que f est l'application identité de $[0,1]$.

7.2 Fonctions convexes

Exercice 10 ($\star$) Soit $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ deux fonctions convexes et de classe C^2 sur $\mathbb{R}$.

a) Montrer que si g est croissante alors $g \circ f$ est convexe.

b) Montrer que si $f : I \to f(I)$ est strictement croissante alors f^{-1} est concave.

Exercice 11 ($\star\star$) Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction convexe.

a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $x_1, ..., x_n \in [a,b]$ et $\alpha_1, ..., \alpha_n \in [0,1]$ tels que $\sum_{k=1}^n \alpha_n = 1$, on a l'Inégalité de Jensen :

$$f(\alpha_1 x_1 + ... + \alpha_n x_n) \leq \alpha_1 f(x_1) + ...\alpha_n f(x_n).$$

b) En déduire que pour $x_1, ..., x_n \in \mathbb{R}_+^*$, on a $(x_1...x_n)^{1/n} \leq \frac{x_1+...+x_n}{n}$.