TD6 : Limite et continuité

6.1 Continuité des fonctions explicites

Exercice 1 ($\star$) Démontrer grâce à la définition (avec les ε) la continuité de f en a pour :

$$f(x) = x^2 \text{ et } a = 1, \quad f(x) = \tfrac{1}{x} \text{ et } a = 3, \quad f(x) = \sqrt{x} \text{ et } a = 2.$$

Exercice 2 ($\star$)

a) Etudier la continuité de la partie fractionnaire : $F : \mathbb{R} \to [0,1[, x \mapsto x - \lfloor x \rfloor$.

b) Etudier la continuité de $f : x \mapsto x\lfloor 1/x \rfloor$ sur $\mathbb{R}^*$.

c) Montrer que f se prolonge par continuité en $x = 0$.

Exercice 3 ($\star$) Montrer que $f(x) = \sin(1/x)$ n'admet pas de limite en 0.
Montrer que la fonction $g(x) = x\sin(1/x)$ définie sur $\mathbb{R}^*$ se prolonge par continuité en 0.

Exercice 4 ($\star$) Déterminer si l'on peut prolonger par continuité aux bords de leurs ensembles de définition les fonctions suivantes :

$$f(x) = x\left|1 + \frac{1}{x}\right| \text{ et } g(x) = \frac{x^2 + |x|}{x^2 - |x|}.$$

6.2 Continuité sur des fonctions abstraites

Exercice 5 ($\star$) Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$ vérifiant :
$\forall x, y \in \mathbb{R}, f(x+y) + f(x-y) = 2[f(x) + f(y)]$.

a) Calculer $f(0)$. Etudier la parité de f.

b) Montrer que $f(nx) = n^2 f(x)$ pour tout entier n et réel x.

c) Montrer que $f(rx) = r^2 f(x)$ pour tout rationnel r et réel x.

d) En déduire que $f(x) = x^2 f(1)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Exercice 6 ($\star\star$) On suppose que $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est périodique de période $T \in \mathbb{R}_+^*$.

a) Montrer que si f admet une limite finie en $+\infty$ alors f est constante.

b) Montrer que si f est continue sur $[0, T]$ alors f est bornée sur $\mathbb{R}$.

c) Montrer que si f est continue et admet 1 et $\sqrt{2}$ pour périodes alors f est constante.

Exercice 7 ($\star\star$) Soit f une fonction définie sur $[0,1]$.

a) Montrer que si f est continue et injective sur $[0,1]$ alors f est strictement monotone.

b) Montrer que si f est monotone et que $[f(0), f(1)] \subset f([0,1])$ alors f est continue sur $[0,1]$.

6.3 Utilisation des théorèmes sur la continuité

Exercice 8 ($\star$) Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$.

a) On suppose que $\forall x \in \mathbb{R}, f(x)^2 = 1$. Montrer que f est constante.

b) On suppose que $\forall x \in \mathbb{R}, f(x)^2 = 1 + x^2$. Déterminer f.

c) On suppose que $\forall x \in \mathbb{R}, f(x)^2 = x^2$. Déterminer f.

Exercice 9 ($\star\star$) Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ une fonction croissante telle que l'application $g : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ et définie par $g(x) = \frac{f(x)}{x}$ soit décroissante. Montrer que g est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.

Exercice 10 ($\star$) Soit f et g des fonctions continues sur $[a,b]$.

a) On suppose ici que pour tout $x \in [a,b], f(x) < g(x)$.
Montrer l'existence d'un réel $m > 0$ tel que $\forall x \in [a,b], f(x) + m \leq g(x)$.

b) On suppose désormais que pour tout $x \in [a,b], 0 < f(x) < g(x)$.
Montrer l'existence d'un réel $M > 1$ tel que $\forall x \in [a,b], Mf(x) \leq g(x)$.

Exercice 11 ($\star\star$) Soit f une fonction continue et bornée sur $\mathbb{R}$.
Montrer que f admet un point fixe.

Exercice 12 ($\star\star$) Soit f et g deux fonctions continues sur $I = [a,b]$ tels que $\sup_I f = \sup_I g$.
Montrer qu'il existe $c \in I$ tel que $f(c) = g(c)$.